Un sport traditionnel : le lancer de gerbe de paille

Bac 2021 Amérique du Nord Sujet 1 · Exercice 1 **10 points** **Durée conseillée 1 h 15**

A.1 Utiliser la deuxième loi de Newton pour déterminer les coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération de M.

Système {gerbe de paille}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen. L'action de l'air étant négligée, la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, dirigé vers le bas, donc de sens opposé à $\vec{j}$:

$a_x(t) = 0$ et $a_y(t) = -g$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de a_y : l'axe (Oy) est orienté vers le haut alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis projection sur les axes du schéma.

A.2 Montrer que les équations horaires du mouvement sont $x(t) = V_0\,t\cos\alpha$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\,t\sin\alpha + H$.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de a_x et a_y :

$$v_x(t) = C_1 \qquad v_y(t) = -g\,t + C_2$$

À $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ de coordonnées $V_0\cos\alpha$ et $V_0\sin\alpha$, donc $C_1 = V_0\cos\alpha$ et $C_2 = V_0\sin\alpha$:

$$v_x(t) = V_0\cos\alpha \qquad v_y(t) = -g\,t + V_0\sin\alpha$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, on cherche de nouveau les primitives :

$$x(t) = V_0\,t\cos\alpha + C_3 \qquad y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\,t\sin\alpha + C_4$$

À $t = 0$, M est en M_0 : $x(0) = 0$ et $y(0) = H$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = H$.

$x(t) = V_0\,t\cos\alpha$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\,t\sin\alpha + H$

PIÈGE
Poser $C_4 = 0$ par habitude. La gerbe part de la hauteur H et non de l'origine du repère : c'est $y(0) = H$ qui donne le dernier terme.

COMPRENDRE
Chaque constante d'intégration se justifie par une condition initiale écrite sur la copie : la vitesse à $t = 0$ pour C_1 et C_2, la position à $t = 0$ pour C_3 et C_4.

A.3 En déduire l'équation de la trajectoire $y(x)$ de M.

On isole le temps dans la première équation horaire : $t = \dfrac{x}{V_0\cos\alpha}$.

On le remplace dans $y(t)$:

$$y(x) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2 + V_0\sin\alpha \times \frac{x}{V_0\cos\alpha} + H$$

$y(x) = -\dfrac{g}{2\,{V_0}^2\cos^2\alpha}\,x^2 + x\tan\alpha + H$

COMPRENDRE
L'équation est de la forme $y = a\,x^2 + b\,x + c$ avec $a < 0$: la trajectoire est une portion de parabole tournée vers le bas, comme l'annonce la suite du sujet.

A.4 À l'aide d'une analyse quantitative, indiquer si la gerbe de paille franchira, ou pas, la barre horizontale.

Données utiles $D = 2{,}0$ m ; $H = 2{,}80$ m ; $V_0 = 9{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 80^\circ$; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; barre à $4{,}50$ m du sol

La barre est à l'abscisse $x = D$. La gerbe la franchit si son altitude $y(D)$ dépasse $4{,}50$ m.

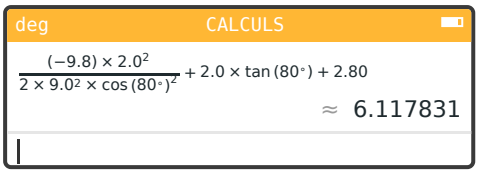
$$y(D) = -\frac{9{,}8 \times 2{,}0^2}{2 \times 9{,}0^2 \times \cos^2(80^\circ)} + 2{,}0 \times \tan(80^\circ) + 2{,}80 = 6{,}1\ \text{m}$$

$y(D) = 6{,}1\ \text{m} > 4{,}50\ \text{m}$: la gerbe passe au-dessus de la barre, elle la franchit.

PIÈGE
Calculatrice réglée en radians : le résultat est alors faux. Vérifier le mode degrés avant de saisir $\cos(80^\circ)$ et $\tan(80^\circ)$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme V_0, D et g. Le centre de masse passe $1{,}6$ m au-dessus de la barre : la marge dépasse largement la demi-longueur de la gerbe ($0{,}30$ m).

À LA CALCULATRICE



A.5 Calculer la valeur de l'énergie cinétique et celle de l'énergie potentielle de pesanteur du système en M_0.

Données utiles $m = 7{,}257$ kg ; $V_0 = 9{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $H = 2{,}80$ m ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $E_{pp} = 0$ au niveau du sol

Énergie cinétique en M_0 :

$$E_c(M_0) = \frac{1}{2}\,m\,V_0^2 = \frac{1}{2}\times 7{,}257\times 9{,}0^2 = 2{,}9\times 10^2\ \text{J}$$

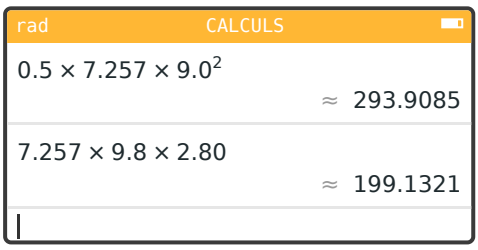
Énergie potentielle de pesanteur en M_0, d'altitude H au-dessus du sol :

$$E_{pp}(M_0) = m\,g\,H = 7{,}257\times 9{,}8\times 2{,}80 = 2{,}0\times 10^2\ \text{J}$$

$E_c(M_0) = 2{,}9\times 10^2$ J et $E_{pp}(M_0) = 2{,}0\times 10^2$ J

COMPRENDRE
La masse est donnée avec quatre chiffres, mais V_0 et g n'en ont que deux : les deux énergies s'écrivent avec deux chiffres significatifs, d'où l'écriture scientifique.

À LA CALCULATRICE



A.6 Indiquer par un raisonnement détaillé si chacune des trois propositions est vraie ou fausse lorsque l'on néglige l'action de l'air.

Sans action de l'air, la gerbe n'est soumise qu'à son poids, force conservative : l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pp}$ se conserve.

Proposition I : fausse. E_m garde la même valeur en tout point de la trajectoire ; elle n'est pas plus grande en M_0 qu'ailleurs.

Proposition II : fausse. Au sommet M_1, seule la coordonnée verticale de la vitesse s'annule. La coordonnée horizontale reste $v_x = V_0\cos\alpha \neq 0$, donc $E_c(M_1) = \frac{1}{2}\,m\,(V_0\cos\alpha)^2$ n'est pas nulle.

Proposition III : fausse. M_0 et M_2 sont à la même altitude, donc $E_{pp}(M_2) = E_{pp}(M_0)$. Comme E_m est la même aux deux points, $E_c(M_2) = E_c(M_0)$.

Les trois propositions sont fausses.

PIÈGE
Croire que la vitesse est nulle au sommet. Ce n'est vrai que pour un lancer vertical ; ici, $v_x = 9{,}0\times\cos(80^\circ) \approx 1{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en M_1.

A.7 Indiquer par un raisonnement détaillé si chacune des trois propositions reste vraie ou fausse lorsqu'on ne néglige plus l'action de l'air.

L'action de l'air est une force de frottement, non conservative, dont le travail est négatif : l'énergie mécanique diminue tout au long du mouvement.

Proposition I : vraie. E_m décroît à partir de M_0, point de départ : c'est donc en M_0 qu'elle est la plus grande.

Proposition II : fausse. Au sommet, la gerbe avance encore horizontalement : sa vitesse n'est pas nulle, son énergie cinétique non plus.

Proposition III : vraie. $E_m(M_2) < E_m(M_0)$ et, les altitudes étant égales, $E_{pp}(M_2) = E_{pp}(M_0)$. Par différence, $E_c(M_2) < E_c(M_0)$.

Avec l'action de l'air : I vraie, II fausse, III vraie.

MÉTHODE
Pour comparer deux énergies cinétiques, comparer d'abord les énergies mécaniques (conservation ou diminution), puis les énergies potentielles (altitudes), et conclure par différence.

B.1 Établir la relation entre la tension E aux bornes de la source idéale, la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur et la tension $u_R(t)$ aux bornes du conducteur ohmique.

Loi des mailles dans le circuit, avec les flèches de tension du schéma (u_C et u_R s'opposent à E quand on parcourt la maille) :

$$E = u_R(t) + u_C(t)$$

COMPRENDRE
Vérification par les potentiels : $E = V_A - V_F$, $u_C = V_A - V_B$, $u_R = V_D - V_F$ et $V_B = V_D$ (même fil), donc $u_C + u_R = V_A - V_F = E$.

B.2 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ lors de la charge est $E = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t)$.

Loi d'Ohm pour le conducteur ohmique : $u_R(t) = R\,i(t)$.

L'intensité est le débit de charge : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$, avec $q(t) = C\,u_C(t)$ la charge du condensateur.

La capacité C est constante (le microphone ne capte pas de son), donc $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ et $u_R(t) = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$.

En reportant dans la loi des mailles (B.1) :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t)$$

PIÈGE
Passer directement de la loi des mailles au résultat. Les trois relations intermédiaires ($u_R = Ri$, $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, $q = C\,u_C$) sont attendues sur la copie.

B.3 En exploitant la courbe, indiquer par un raisonnement argumenté la fonction qui modélise la charge du condensateur.

Sur la courbe, $u_C(0) = 0$ V, puis u_C augmente et tend vers une valeur limite proche de 48 V, c'est-à-dire E.

Fonction 2 : $u_C(0) = E \times e^0 = E = 48$ V. Elle ne part pas de zéro : elle est écartée.

Fonction 1 : $u_C(0) = 0$, mais $e^{t/(RC)}$ croît sans limite, donc u_C devient négative et tend vers $-\infty$. Elle est écartée.

Fonction 3 : $u_C(0) = E\,(1-1) = 0$ et, quand t devient grand, $e^{-t/(RC)}$ tend vers 0, donc u_C tend vers E. Elle est en accord avec la courbe.

La charge est modélisée par la fonction 3 : $u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

MÉTHODE
Pour trier des modèles, tester deux points de la courbe : la valeur à $t = 0$ et la limite aux grandes valeurs de t. Ici, le premier test écarte la fonction 2, le second la fonction 1.

B.4 Vérifier que la fonction retenue est solution de l'équation différentielle établie à la question B.2.

On écrit $u_C(t) = E - E\,e^{-\frac{t}{RC}}$ et on dérive :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -E \times \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

On calcule le second membre de l'équation différentielle :

$$RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = RC \times \frac{E}{RC}\,e^{-\frac{t}{RC}} + E - E\,e^{-\frac{t}{RC}} = E$$

$RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$ à chaque instant : la fonction 3 est bien solution.

PIÈGE
Erreur de signe en dérivant : la dérivée de $e^{-t/(RC)}$ est $-\dfrac{1}{RC}\,e^{-t/(RC)}$. Avec le « $-$ » placé devant l'exponentielle, la dérivée de u_C est positive, ce qui convient à une tension croissante.

B.5 En exploitant la courbe et en explicitant le raisonnement, déterminer la distance d séparant les deux armatures quand le microphone ne capte pas de son.

Données utiles $E = 48$ V ; $R = 100 \times 10^6\ \Omega$; $\varepsilon\,S = 1{,}4 \times 10^{-15}$ F · m ; $C = \dfrac{\varepsilon\,S}{d}$

Le temps caractéristique du circuit est $\tau = RC$. D'après la fonction 3, $u_C(\tau) = E\,(1 - e^{-1}) = 0{,}63\,E$.

$u_C(\tau) = 0{,}63 \times 48 = 30$ V. Sur la courbe, cette tension est atteinte à $t = 0{,}007$ s : $\tau = 7 \times 10^{-3}$ s.

Capacité : $C = \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{7 \times 10^{-3}}{100 \times 10^6} = 7 \times 10^{-11}$ F

Distance entre les armatures :

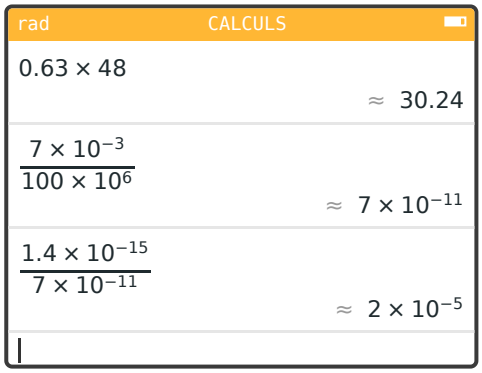
$$d = \frac{\varepsilon\,S}{C} = \frac{1{,}4 \times 10^{-15}}{7 \times 10^{-11}} = 2 \times 10^{-5}\ \text{m}$$

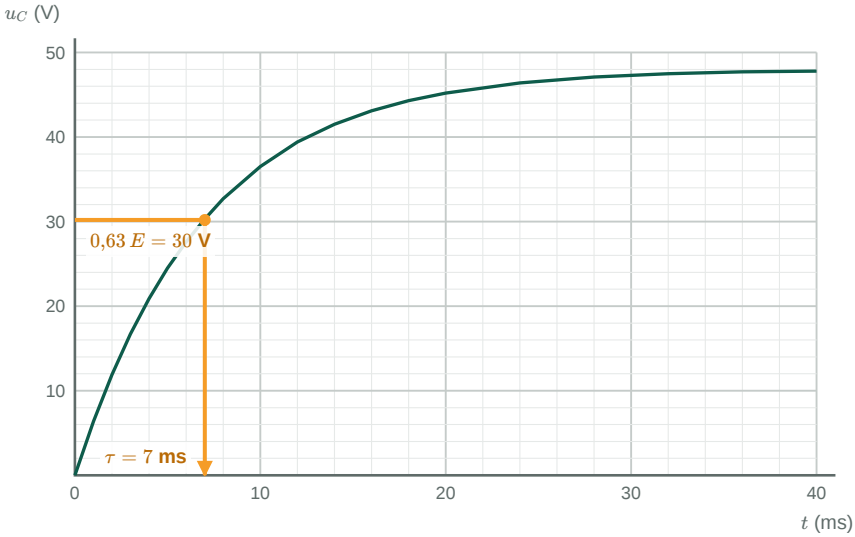
$d = 2 \times 10^{-5}$ m $= 20$ µm, valeur comprise dans l'intervalle de 15 à 25 µm annoncé par le sujet.

COMPRENDRE
La lecture de τ sur le graphique (une petite division vaut 0,002 s) ne donne qu'un chiffre significatif : d s'écrit donc 2×10^{-5} m, et non $2{,}0 \times 10^{-5}$ m.

MÉTHODE
Autre lecture de τ : tracer la tangente à la courbe à l'origine ; elle coupe l'asymptote $u_C = E$ à l'abscisse $t = \tau$. La lecture à 63 % de E est en général plus précise.

À LA CALCULATRICE





B.5 · Courbe de charge du sujet, avec la lecture du temps caractéristique

B.6 Justifier par un raisonnement détaillé l'évolution de la capacité du condensateur lorsque la distance séparant les deux armatures diminue.

$C = \dfrac{\varepsilon\, S}{d}$: le produit $\varepsilon\, S$ est constant (même air, mêmes armatures), donc C est inversement proportionnelle à d.

Quand la distance d diminue, la capacité C augmente.

COMPRENDRE
C'est le principe du microphone : l'onde sonore fait vibrer la membrane, d varie, donc C varie, ce qui modifie la tension transmise au pré-amplificateur.

C.1 Calculer le niveau d'intensité sonore L_1 correspondant à l'intensité sonore I_1.

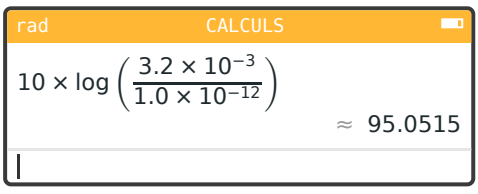
Données utiles $I_1 = 3{,}2 \times 10^{-3}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$; $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$

$$L_1 = 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 10 \log\left(\frac{3{,}2 \times 10^{-3}}{1{,}0 \times 10^{-12}}\right) = 95\ \text{dB}$$

$L_1 = 95$ dB

PIÈGE
Utiliser la touche « ln » au lieu de « log » : la formule emploie le logarithme décimal. Avec « ln », on trouverait environ 219 dB, valeur impossible.

À LA CALCULATRICE



C.2 Commenter le résultat de la question C.1 au regard des durées limites d'exposition journalière.

D'après le tableau, un niveau de 95 dB ne doit pas être subi plus de 15 minutes par jour.

À 1,0 m de l'enceinte, le niveau sonore est dangereux : au-delà de 15 min par jour, il y a un risque de traumatisme irréversible de l'audition.

C.3 Montrer que la puissance P de l'enceinte est égale à $4{,}0 \times 10^{-2}$ W.

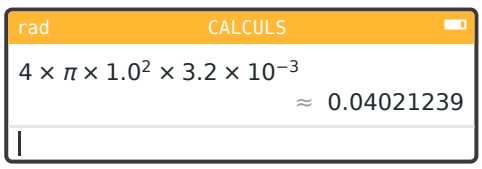
Données utiles $I_1 = 3{,}2 \times 10^{-3}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ à $d_1 = 1{,}0$ m ; $I = \dfrac{P}{4\pi\, d^2}$

De $I_1 = \dfrac{P}{4\pi\, d_1^2}$ on tire $P = 4\pi\, d_1^2\, I_1$.

$$P = 4\pi \times 1{,}0^2 \times 3{,}2 \times 10^{-3} = 4{,}0 \times 10^{-2}\ \text{W}$$

$P = 4{,}0 \times 10^{-2}$ W, valeur attendue.

À LA CALCULATRICE



C.4 Expliquer le choix des organisateurs de fixer à $2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ la valeur maximale de l'intensité sonore perçue par les spectateurs.

Données utiles durée de la manifestation : 2 h ; limite pour 2 h par jour : 86 dB ; $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$

Niveau d'intensité sonore correspondant à $I_2 = 2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$:

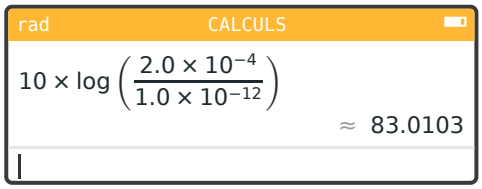
$$L_2 = 10 \log\left(\frac{2{,}0 \times 10^{-4}}{1{,}0 \times 10^{-12}}\right) = 83\ \text{dB}$$

La manifestation dure 2 h : d'après le tableau, le niveau ne doit pas dépasser 86 dB pour cette durée d'exposition.

$L_2 = 83\ \text{dB} < 86\ \text{dB}$: les spectateurs peuvent rester 2 h sans risque de traumatisme irréversible.

COMPRENDRE
Le tableau est en décibels, la consigne des organisateurs en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$: il faut convertir l'une des deux grandeurs avant de comparer.

À LA CALCULATRICE



C.5 Indiquer, par un raisonnement quantitatif, si la distance de sécurité de 3,0 m entre les barrières et l'enceinte est suffisante pour respecter la valeur maximale choisie par les organisateurs.

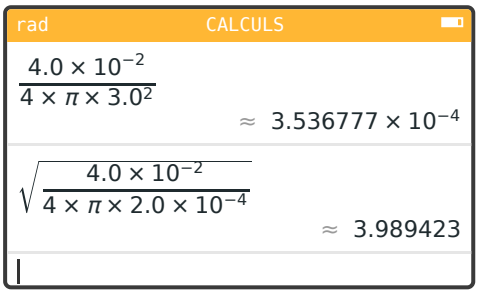
Données utiles $P = 4{,}0 \times 10^{-2}$ W (C.3) ; $d_3 = 3{,}0$ m ; valeur maximale : $2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

Intensité sonore au niveau des barrières, à $d_3 = 3{,}0$ m de l'enceinte :

$$I_3 = \frac{P}{4\pi\, d_3^2} = \frac{4{,}0 \times 10^{-2}}{4\pi \times 3{,}0^2} = 3{,}5 \times 10^{-4}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$I_3 = 3{,}5 \times 10^{-4}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} > 2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$: la distance de sécurité est insuffisante.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE

Diviser I_1 par 3 parce que la distance est triplée. L'intensité varie en $1/d^2$: elle est divisée par $3^2 = 9$.

COMPRENDRE

La distance minimale s'obtient en isolant d : $d_{\text{min}} = \sqrt{\dfrac{P}{4\pi\, I_2}} \approx 4{,}0$ m. Il faudrait reculer les barrières d'environ un mètre.