Atterrissage du premier étage d'une fusée

Bac 2022 Amérique du Sud Jour 1 · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

1 Représenter sur un schéma le vecteur vitesse du point M aux instants t_1 et t_2, à l'échelle 1 cm pour $6{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $t_1 = 0{,}50$ s ; $t_2 = 2{,}50$ s ; graphique 1 : $v_y = 2{,}80\,t - 13{,}6$

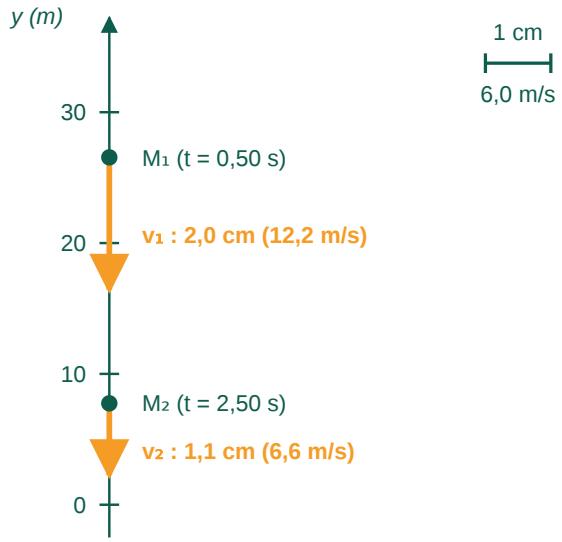
Le mouvement est vertical : $v_x = 0$, donc $v = |v_y|$. Avec la modélisation du graphique 1 :

$v_y(t_1) = 2{,}80 \times 0{,}50 - 13{,}6 = -12{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ $\quad$ $v_y(t_2) = 2{,}80 \times 2{,}50 - 13{,}6 = -6{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Longueurs à l'échelle : $\dfrac{12{,}2}{6{,}0} = 2{,}0$ cm et $\dfrac{6{,}6}{6{,}0} = 1{,}1$ cm.

Comme $v_y < 0$, les deux vecteurs sont verticaux, dirigés vers le bas, et tracés à partir de la position de M à la date considérée.

$\vec{v}_1$: 2,0 cm vers le bas ($12{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) ; $\vec{v}_2$: 1,1 cm vers le bas ($6{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)

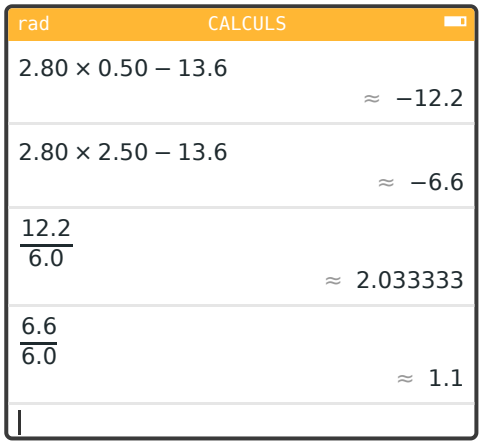


1 · Vecteurs vitesse du point M aux dates t_1 et t_2 (échelle : 1 cm pour 6,0 m·s⁻¹)

PIÈGE
Dessiner les vecteurs vers le haut parce que l'axe est ascendant. Le signe négatif de v_y indique que l'étage descend : les flèches pointent vers le sol.

COMPRENDRE
L'énoncé nomme l'axe vertical Oz dans le texte, mais le schéma et les questions utilisent Oy : c'est le même axe, orienté vers le haut.

À LA CALCULATRICE



2 Déterminer la valeur de l'accélération, commenter le signe de sa projection suivant Oy et qualifier le mouvement.

Données utiles graphique 1 : $v_y = 2{,}80\,t - 13{,}6$

Par définition $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, donc $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$: c'est le coefficient directeur de la droite du graphique 1.

$a_y = 2{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, constante.

$a_y > 0$: le vecteur accélération est dirigé vers le haut, alors que le vecteur vitesse est dirigé vers le bas. Les deux vecteurs sont de sens opposés, la valeur de la vitesse diminue.

La trajectoire est une droite verticale et l'accélération est constante.

$a = 2{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; mouvement rectiligne uniformément ralenti

PIÈGE
Conclure « $a_y > 0$ donc le mouvement est accéléré ». Ce qui compte est le sens de $\vec{a}$ par rapport à $\vec{v}$: opposés ici, donc l'étage freine.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme le coefficient 2,80 de la modélisation.

3 Représenter sur un schéma les forces modélisant les principales actions qui s'exercent sur le premier étage, de façon à rendre compte du signe de a_y. Justifier.

Données utiles $a_y = 2{,}80\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (Q2)

Système {premier étage}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces principales : le poids $\vec{P}$, vertical vers le bas ; la poussée du moteur $\vec{F}$, verticale vers le haut. Les frottements de l'air, eux aussi vers le haut, s'ajoutent à la poussée.

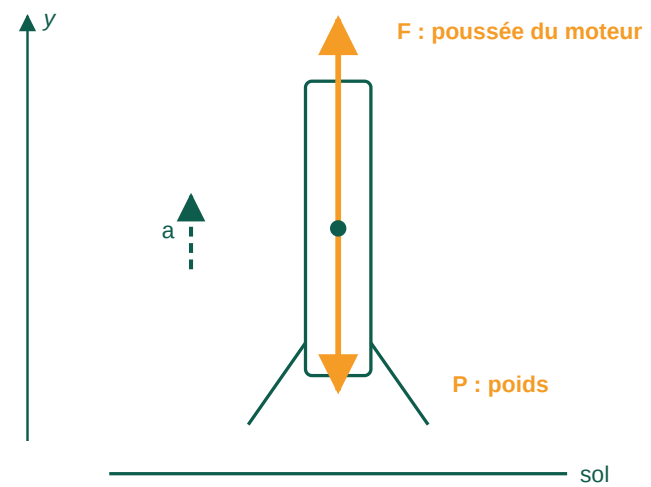
Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{a}$. En projection sur Oy : $F - P = m\,a_y$.

Comme $a_y > 0$, on a $F - P > 0$: la somme des forces est dirigée vers le haut, comme $\vec{a}$.

$F > P$: la flèche de la poussée est tracée plus longue que celle du poids.

COMPRENDRE
La somme des forces a toujours le sens de l'accélération, pas celui de la vitesse. L'étage descend, pourtant la résultante est vers le haut.

MÉTHODE
Pour un schéma de forces justifié : nommer chaque force avec sa direction et son sens, écrire la deuxième loi de Newton, puis la projeter sur l'axe pour comparer les longueurs.



3 · Forces sur le premier étage : la poussée l'emporte sur le poids, l'accélération est vers le haut

4 En exploitant les graphiques 1 et 2, montrer que l'équation horaire du mouvement de M s'écrit $y = 1{,}40\,t^2 - 13{,}6\,t + 33$, avec y en m et t en s.

Données utiles graphique 1 : $v_y = 2{,}80\,t - 13{,}6$; graphique 2 : altitude à $t = 0$

Par définition $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$: y est une primitive de $v_y = 2{,}80\,t - 13{,}6$.

$$y(t) = \frac{2{,}80}{2}\,t^2 - 13{,}6\,t + C = 1{,}40\,t^2 - 13{,}6\,t + C$$

La constante C est l'altitude à $t = 0$: $y(0) = C$. Sur le graphique 2, on lit $y(0) \approx 33$ m, donc $C = 33$ m.

$y = 1{,}40\,t^2 - 13{,}6\,t + 33$ (y en m, t en s) : c'est l'expression attendue.

PIÈGE
Oublier la constante d'intégration ou la poser nulle. Elle se détermine avec la condition initiale, lue ici sur le graphique 2.

MÉTHODE
Vérification rapide : à $t = 2{,}50$ s, l'équation donne $y = 7{,}75$ m, en accord avec le point lu sur le graphique 2 (environ 8 m).

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1.40 \times 2.50^2 - 13.6 \times 2.50 + 33$

≈ 7.75

5 Déterminer la valeur de la vitesse du système lorsqu'il touche le sol, en admettant que l'accélération ne varie pas sur les derniers mètres.

Données utiles $y = 1{,}40\,t^2 - 13{,}6\,t + 33$ (Q4) ; $v_y = 2{,}80\,t - 13{,}6$

Le système touche le sol à la date t_f telle que $y(t_f) = 0$: $1{,}40\,t_f^2 - 13{,}6\,t_f + 33 = 0$.

Discriminant : $\Delta = 13{,}6^2 - 4 \times 1{,}40 \times 33 = 0{,}16$, d'où deux solutions :

$$t_f = \frac{13{,}6 - \sqrt{0{,}16}}{2 \times 1{,}40} = 4{,}71 \text{ s} \qquad t'_f = \frac{13{,}6 + \sqrt{0{,}16}}{2 \times 1{,}40} = 5{,}00 \text{ s}$$

Le sol est atteint à la première date : on retient $t_f = 4{,}71$ s (à t'_f, on aurait $v_y > 0$, l'étage remonterait).

$v_y(t_f) = 2{,}80 \times 4{,}714 - 13{,}6 = -0{,}40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$v = |v_y(t_f)| \approx 0{,}40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

PIÈGE
Arrondir t_f à 4,7 s avant de calculer la vitesse donne $0{,}44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: le résultat est une petite différence de deux grands nombres. Garder la valeur complète de t_f dans la calculatrice.

COMPRENDRE
La modélisation n'est établie que jusqu'à 3 s. La prolonger jusqu'au sol suppose l'accélération inchangée : c'est l'hypothèse donnée par l'énoncé.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$13.6^2 - 4 \times 1.40 \times 33$

≈ 0.16

$\dfrac{13.6 - \sqrt{0.16}}{2 \times 1.40}$

≈ 4.714286

$\dfrac{13.6 + \sqrt{0.16}}{2 \times 1.40}$

≈ 5

$2.80 \times 4.714 - 13.6$

≈ -0.4008

6 Préciser si l'atterrissage s'effectue « en douceur ».

Données utiles critère : vitesse verticale inférieure à $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v \approx 0{,}40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Q5)

Au contact du sol, la valeur de la vitesse verticale est $0{,}40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit quinze fois moins que la limite de $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$0{,}40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: l'atterrissage s'effectue en douceur.

COMPRENDRE
Le graphique 1 le laissait prévoir : dès $t = 3$ s, la vitesse vaut environ $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et elle continue de diminuer.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{6}{0.40}$

≈ 15