Capacité thermique massique du cuivre

Bac 2022 Centres étrangers 1 Jour 2 · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

1 Prévoir le sens du transfert thermique Q qui a lieu entre le système et le thermostat.

Données utiles $\theta_a = 20{,}5\ ^\circ\text{C}$; $\theta_{th} = 100{,}0\ ^\circ\text{C}$

Un transfert thermique se fait spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. Ici $\theta_{th} > \theta_a$: l'air de l'étuve est plus chaud que le cuivre.

Le transfert thermique a lieu de l'air de l'étuve (thermostat) vers l'échantillon de cuivre : le système reçoit de l'énergie, $Q > 0$.

COMPRENDRE
Q est compté positivement quand le système le reçoit. Ce signe se retrouve dans la loi de Newton de l'énoncé : $\Phi = h\,S\,(\theta_{th} - \theta(t))$ est positif tant que le cuivre est plus froid que l'air.

2 Écrire le premier principe pour le système et en déduire une relation entre Q, m, c et $\Delta\theta$.

Système {échantillon de cuivre}, au repos et incompressible. Premier principe : $\Delta U = W + Q$.

Le système n'échange aucun travail avec l'extérieur ($W = 0$), donc $\Delta U = Q$.

Or, pour un système incompressible, $\Delta U = m\,c\,\Delta\theta$.

$$Q = m\,c\,\Delta\theta$$

PIÈGE
Écrire directement $Q = m\,c\,\Delta\theta$ sans le premier principe : la question demande de l'énoncer et de justifier $W = 0$.

3 Donner la relation liant le transfert thermique Q et le flux thermique Φ pendant la durée très courte Δt, Φ étant supposé constant.

Le flux thermique est l'énergie transférée par unité de temps : $\Phi = \dfrac{Q}{\Delta t}$.

$$Q = \Phi\,\Delta t$$

COMPRENDRE
Un flux thermique est une puissance : Φ en watts, Δt en secondes, Q en joules.

4 En déduire une relation entre h, S, θ_{th}, $\theta(t)$, m, c, $\Delta\theta$ et Δt.

Les questions 2 et 3 donnent deux expressions de Q : $m\,c\,\Delta\theta = \Phi\,\Delta t$.

Avec la loi de Newton $\Phi = h\,S\,(\theta_{th} - \theta(t))$:

$$m\,c\,\Delta\theta = h\,S\,(\theta_{th} - \theta(t))\,\Delta t$$

5 Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ et la mettre sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}\,\theta(t) = \dfrac{\theta_{th}}{\tau}$ avec $\tau = \dfrac{m\,c}{h\,S}$.

On divise la relation de la question 4 par $m\,c\,\Delta t$:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{h\,S}{m\,c}\,(\theta_{th} - \theta(t))$$

Quand Δt tend vers 0, $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ tend vers la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$:

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{h\,S}{m\,c}\,\theta_{th} - \frac{h\,S}{m\,c}\,\theta(t)$$

On regroupe les termes en $\theta(t)$ à gauche et on pose $\tau = \dfrac{m\,c}{h\,S}$, soit $\dfrac{h\,S}{m\,c} = \dfrac{1}{\tau}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,\theta(t) = \frac{\theta_{th}}{\tau} \text{ avec } \tau = \frac{m\,c}{h\,S}}$$

MÉTHODE
Pour passer d'un bilan sur une durée courte à une équation différentielle : diviser par Δt, faire tendre Δt vers 0, puis isoler la dérivée avec un coefficient 1 devant elle.

6 La solution est de la forme $\theta(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + B$. Déterminer l'expression des constantes A et B en fonction de θ_a et θ_{th}, en détaillant le raisonnement.

Données utiles $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$

Aux temps longs : $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ tend vers 0, donc $\theta(t)$ tend vers B. Le cuivre finit à la température du thermostat : $B = \theta_{th}$.

Condition initiale : à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_a$. Or $\theta(0) = A\,\mathrm{e}^0 + B = A + \theta_{th}$, donc $A = \theta_a - \theta_{th}$.

$$\boxed{A = \theta_a - \theta_{th} \text{ et } B = \theta_{th}, \text{ soit } \theta(t) = (\theta_a - \theta_{th})\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \theta_{th}}$$

PIÈGE
Écrire $A = \theta_a$ en oubliant que $\theta(0) = A + B$. Ici A est négatif : la température augmente.

MÉTHODE
Deux constantes, deux conditions : l'état final (dérivée nulle, exponentielle nulle) donne B, l'état initial donne A. On peut aussi trouver B en reportant la solution dans l'équation différentielle.

7 Montrer que l'application numérique conduit à $\theta(t) = 100 - 79{,}5 \times \mathrm{e}^{-t/784}$, avec t en s.

Données utiles $m = 44{,}8$ g ; $c = 385$ J · kg^{-1} · K^{-1} ; $h = 10$ W · m^{-2} · K^{-1} ; $S = 22$ cm^2 ; $\theta_a = 20{,}5$ °C ; $\theta_{th} = 100{,}0$ °C ; A et B (Q6)

Temps caractéristique, avec $m = 44{,}8 \times 10^{-3}$ kg et $S = 22 \times 10^{-4}$ m^2 :

$$\tau = \frac{m\,c}{h\,S} = \frac{44{,}8 \times 10^{-3} \times 385}{10 \times 22 \times 10^{-4}} = 784 \text{ s}$$

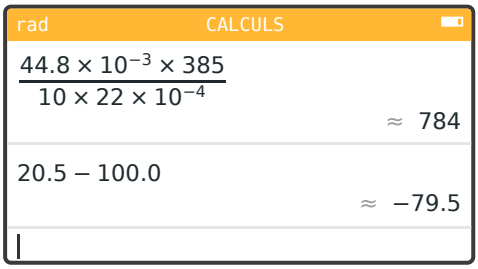
Constantes : $A = \theta_a - \theta_{th} = 20{,}5 - 100{,}0 = -79{,}5$ °C et $B = \theta_{th} = 100{,}0$ °C.

$$\boxed{\theta(t) = 100 - 79{,}5 \times \mathrm{e}^{-t/784} \text{ (θ en °C, t en s) : c'est l'expression attendue.}}$$

PIÈGE
Conversions : $44{,}8$ g $= 44{,}8 \times 10^{-3}$ kg et 22 cm$^2 = 22 \times 10^{-4}$ m^2 (et non 22×10^{-2}). Sans elles, τ est faux d'un facteur 10 à 1000.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : h et S n'en ont que deux, on écrirait en toute rigueur $\tau \approx 7{,}8 \times 10^2$ s. On garde 784 s pour retrouver l'expression de l'énoncé.

À LA CALCULATRICE



8 Déterminer la date t_1 à partir de laquelle la température du système sera supérieure à 99 °C.

Données utiles $\theta(t) = 100 - 79{,}5 \times \mathrm{e}^{-t/784}$ (Q7)

On cherche t_1 tel que $\theta(t_1) = 99\ ^\circ\mathrm{C}$:

$100 - 79{,}5 \times \mathrm{e}^{-t_1/784} = 99$, soit $\mathrm{e}^{-t_1/784} = \dfrac{1}{79{,}5}$

On prend le logarithme népérien : $-\dfrac{t_1}{784} = \ln\left(\dfrac{1}{79{,}5}\right) = -\ln(79{,}5)$

$$t_1 = 784 \times \ln(79{,}5) = 3{,}43 \times 10^3 \text{ s}$$

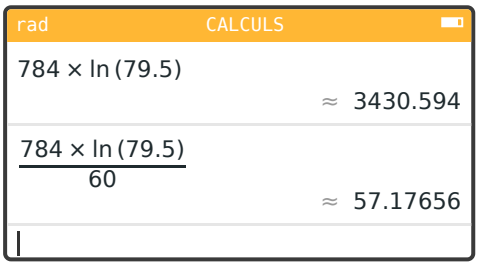
La température est croissante : elle dépasse 99 °C pour toute date $t > t_1$.

$t_1 = 3{,}43 \times 10^3$ s, soit environ 57 min

PIÈGE
Si l'on résout l'inéquation, diviser par un nombre négatif change le sens de l'inégalité : on doit trouver $t > t_1$, pas $t < t_1$.

COMPRENDRE
$t_1 \approx 4{,}4\,\tau$: il faut plusieurs temps caractéristiques pour atteindre le thermostat à 1 °C près. Laisser l'échantillon une heure dans l'étuve suffit donc.

À LA CALCULATRICE



9 Sachant que l'ensemble {échantillon de cuivre, eau} est isolé dans le calorimètre, montrer que $c = \dfrac{m_e\, c_{eau}\, (\theta_f - \theta_e)}{m\, (\theta_{th} - \theta_f)}$.

L'ensemble {cuivre, eau} est isolé et n'échange pas de travail : son énergie interne ne varie pas.

$$\Delta U_{\text{eau}} + \Delta U_{\text{cuivre}} = 0$$

L'eau passe de θ_e à θ_f, le cuivre de θ_{th} à θ_f :

$$m_e\, c_{eau}\, (\theta_f - \theta_e) + m\, c\, (\theta_f - \theta_{th}) = 0$$

donc $m\, c\, (\theta_{th} - \theta_f) = m_e\, c_{eau}\, (\theta_f - \theta_e)$.

$$c = \frac{m_e\, c_{eau}\, (\theta_f - \theta_e)}{m\, (\theta_{th} - \theta_f)}$$

PIÈGE
Chaque variation s'écrit « température finale moins température initiale » du corps concerné. Pour le cuivre, c'est $\theta_f - \theta_{th}$, négatif : il se refroidit.

COMPRENDRE
L'énergie cédée par le cuivre est intégralement reçue par l'eau : c'est ce que traduit la somme nulle.

10 Faire l'application numérique. Proposer une explication à un éventuel écart avec la valeur tabulée.

Données utiles $m_e = 100$ g ; $m = 44{,}8$ g ; $c_{eau} = 4180$ J · kg^{-1} · K^{-1} ; $\theta_e = 20{,}5$ °C ; $\theta_f = 23{,}1$ °C ; $\theta_{th} = 100{,}0$ °C ; valeur tabulée 385 J · kg^{-1} · K^{-1}

$$c = \frac{100 \times 4180 \times (23{,}1 - 20{,}5)}{44{,}8 \times (100{,}0 - 23{,}1)} = 3{,}2 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

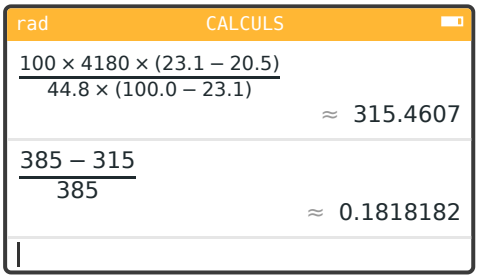
Les deux masses peuvent rester en grammes : leur rapport est sans unité.

La valeur obtenue est inférieure à la valeur tabulée (385 J · kg^{-1} · K^{-1}), avec un écart relatif d'environ 18 %.

Explications possibles : l'eau a reçu moins d'énergie que le cuivre n'en a cédé. Le cuivre se refroidit dans l'air pendant son transport de l'étuve au calorimètre ; le calorimètre lui-même absorbe une partie de l'énergie ; l'enceinte n'est pas parfaitement calorifugée. La température finale mesurée est alors trop basse, et c est sous-estimée.

$c = 3{,}2 \times 10^2$ J · kg^{-1} · K^{-1}, inférieure à la valeur tabulée : l'ensemble {cuivre, eau} n'est pas réellement isolé.

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs seulement : l'écart $\theta_f - \theta_e = 2{,}6$ °C n'en a que deux. Une erreur de 0,1 °C sur cet écart change déjà c d'environ 4 %.

MÉTHODE

Pour expliquer un écart, chercher l'hypothèse du modèle la moins bien vérifiée (ici « isolé » et « le calorimètre ne participe pas ») et dire dans quel sens elle fausse le résultat.