Mesure de la masse de Jupiter et du Soleil

Bac 2022 Centres étrangers 1 Jour 2 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

1 À partir de la figure 1, préciser la relation qui existe entre T^2 et a^3 pour les quatre satellites de Jupiter. Nommer la loi correspondante (établie en 1618).

Les quatre points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine : T^2 est proportionnel à a^3.

$T^2 = k\,a^3$, soit $\dfrac{T^2}{a^3} = k$ (constante) : c'est la **troisième loi de Kepler** (loi des périodes).

PIÈGE
Écrire seulement « c'est une droite ». La proportionnalité exige une droite qui passe par l'origine : les deux arguments sont attendus.

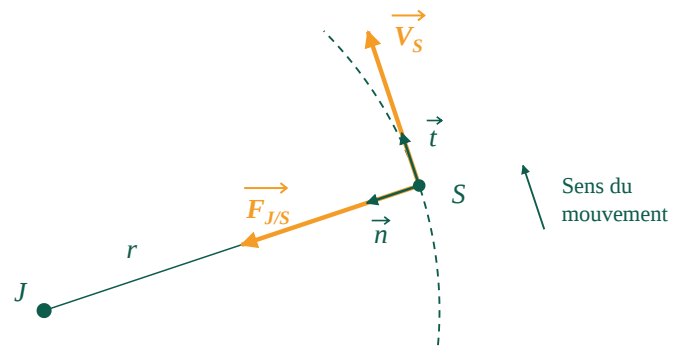
2 Reprendre les éléments de la figure 2 et représenter, sans souci d'échelle, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_S}$ du satellite et la force de gravitation $\overrightarrow{F}_{J/S}$ exercée par Jupiter sur le satellite.

Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_S}$ part de S ; il est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement, donc comme $\vec{t}$.

La force $\overrightarrow{F}_{J/S}$ part de S ; elle est portée par la droite (SJ) et dirigée vers J, donc comme $\vec{n}$.

Schéma ci-dessous : $\overrightarrow{V_S}$ selon $\vec{t}$, $\overrightarrow{F}_{J/S}$ selon $\vec{n}$, tous deux appliqués en S.

PIÈGE
Faire partir la force de J, ou la dessiner vers l'extérieur de la trajectoire. Elle s'exerce sur le satellite et elle est attractive : origine en S, flèche vers J.



2 · Figure 2 complétée : vitesse et force tracées en orange

3 Donner l'expression de la force de gravitation $\overrightarrow{F}_{J/S}$ exercée par Jupiter sur le satellite en fonction de M_J, m, G, r et $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{F}_{J/S} = G\,\frac{m\,M_J}{r^2}\,\vec{n}$$

COMPRENDRE
Le vecteur unitaire $\vec{n}$ pointe de S vers J et la force est attractive : elle est donc selon $+\vec{n}$, sans signe « $-$ ».

4 Appliquer la deuxième loi de Newton et en déduire l'expression de la vitesse V_S du satellite en fonction de G, M_J et r.

Système {satellite}, de masse m constante ; référentiel joviocentrique supposé galiléen ; seule force : $\overrightarrow{F}_{J/S}$.

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F}_{J/S} = m\,\vec{a}$, soit $G\,\dfrac{m\,M_J}{r^2}\,\vec{n} = m\,\vec{a}$, donc

$$\vec{a} = \frac{G\,M_J}{r^2}\,\vec{n}$$

Or, dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon r : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}V_S}{\mathrm{d}t}\,\vec{t} + \dfrac{V_S^2}{r}\,\vec{n}$.

Par identification selon $\vec{n}$: $\dfrac{V_S^2}{r} = \dfrac{G\,M_J}{r^2}$, soit $V_S^2 = \dfrac{G\,M_J}{r}$.

$$\boxed{V_S = \sqrt{\frac{G\,M_J}{r}}}$$

COMPRENDRE
La masse m du satellite se simplifie : la vitesse ne dépend que de l'astre attracteur et du rayon de l'orbite.

MÉTHODE
Orbite circulaire : 1) deuxième loi de Newton ; 2) accélération dans le repère de Frenet ; 3) identification. Selon $\vec{n}$ on obtient la vitesse ; selon $\vec{t}$, $\dfrac{\mathrm{d}V_S}{\mathrm{d}t} = 0$: le mouvement est uniforme.

5 En déduire que, pour un mouvement circulaire, le quotient $\dfrac{T^2}{a^3}$ est égal à $\dfrac{4\pi^2}{G\,M_J}$.

Le mouvement est uniforme : pendant une période T, le satellite parcourt le périmètre $2\pi r$ de son orbite à la vitesse V_S.

$$T = \frac{2\pi r}{V_S} \quad \text{donc} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{V_S^2} = 4\pi^2 r^2 \times \frac{r}{G\,M_J} = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,M_J}$$

Pour une trajectoire circulaire, le demi-grand axe est égal au rayon : $a = r$.

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_J}}$$

PIÈGE
Oublier de justifier le passage de r à a : la démonstration est faite avec le rayon, la relation demandée porte sur le demi-grand axe.

6 À l'aide des résultats expérimentaux, calculer la masse M_J de Jupiter. Commenter un éventuel écart à la valeur tabulée.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$; $1\ \mathrm{j^2 \cdot km^{-3}} = 7{,}46\ \mathrm{s^2 \cdot m^{-3}}$; valeur tabulée : $1{,}898\,6 \times 10^{27}$ kg

D'après les questions 1 et 5, le coefficient directeur k de la droite de la figure 1 vaut $k = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_J}$, donc $M_J = \dfrac{4\pi^2}{G\,k}$.

Lecture sur la droite : pour $a^3 = 0{,}50 \times 10^{19}\ \mathrm{km^3}$, on lit $T^2 = 210\ \mathrm{j^2}$.

$$k = \frac{210}{0{,}50 \times 10^{19}} = 4{,}2 \times 10^{-17}\ \mathrm{j^2 \cdot km^{-3}}$$

Conversion : $k = 4{,}2 \times 10^{-17} \times 7{,}46 = 3{,}1 \times 10^{-16}\ \mathrm{s^2 \cdot m^{-3}}$.

$$M_J = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 3{,}1 \times 10^{-16}} = 1{,}9 \times 10^{27}\ \mathrm{kg}$$

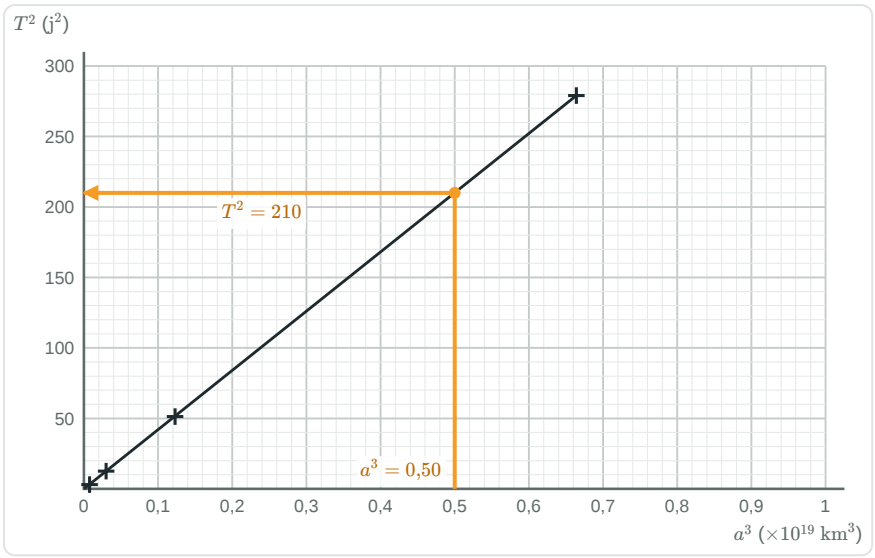
L'écart avec la valeur tabulée est inférieur à 1 % : le résultat est en accord avec elle, à la précision de la lecture graphique près.

$M_J = 1{,}9 \times 10^{27}$ kg, en accord avec la valeur tabulée $1{,}898\,6 \times 10^{27}$ kg.

PIÈGE
Utiliser k en $\mathrm{j^2 \cdot km^{-3}}$ avec G en unités SI : la masse obtenue est fausse d'un facteur 7,46. La conversion est indispensable.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement : la lecture graphique ($0{,}50$ et 210) limite la précision, pas la valeur de G.

MÉTHODE
Coefficient directeur d'une droite passant par l'origine : choisir un point de la droite modèle, loin de l'origine et facile à lire sur le quadrillage, plutôt qu'un point de mesure.



6 · Figure 1 du sujet, avec la lecture utilisée pour le coefficient directeur

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{210}{0.50 \times 10^{19}} \approx 4.2 \times 10^{-17}$

$4.2 \times 10^{-17} \times 7.46 \approx 3.1332 \times 10^{-16}$

$\dfrac{4 \times \pi^2}{6.67 \times 10^{-11} \times 3.1332 \times 10^{-16}} \approx 1.88906 \times 10^{27}$

7 Déterminer la masse du Soleil.

Données utiles distance Terre-Soleil : 150 millions de kilomètres ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; période de révolution de la Terre (valeur connue) : $T = 365{,}25$ j

La relation de la question 5 s'applique à tout satellite d'un astre central. On l'écrit pour la Terre, en orbite quasi circulaire autour du Soleil de masse M_S :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_S} \quad \text{donc} \quad M_S = \frac{4\pi^2 a^3}{G\,T^2}$$

Avec $a = 150 \times 10^6\ \text{km} = 1{,}50 \times 10^{11}\ \text{m}$ et $T = 365{,}25 \times 24 \times 3600 = 3{,}156 \times 10^7\ \text{s}$:

$$M_S = \frac{4\pi^2 \times (1{,}50 \times 10^{11})^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (3{,}156 \times 10^7)^2}$$

$$\boxed{M_S = 2{,}01 \times 10^{30}\ \text{kg}}$$

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$365.25 \times 24 \times 3600 \approx 3.15576 \times 10^7$

$\dfrac{4 \times \pi^2 \times (1.50 \times 10^{11})^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 31\,557\,600^2} \approx 2.005856 \times 10^{30}$

PIÈGE
Laisser a en kilomètres ou T en jours : G impose des mètres et des secondes. Le cube et le carré amplifient fortement toute erreur d'unité.

MÉTHODE
Question ouverte : annoncer le satellite choisi (la Terre), la relation utilisée et la donnée apportée de mémoire (un an), puis mener le calcul en unités SI.