L'airbag

Bac 2022 Amérique du Sud Jour 2 · Exercice 1 **10 points** **Durée conseillée 1 h 45**

1.1 Partie 1. Déterminer, à l'aide de la figure 2, la valeur de E et la fréquence f de la tension en créneaux $u_G(t)$.

La tension u_G vaut alternativement 0 V et sa valeur haute, lue sur le palier : $E = 5{,}0$ V.

Le motif se répète à l'identique tous les $T = 1{,}0$ s (fronts montants à $t = 0$ s puis $t = 1{,}0$ s), donc $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{1{,}0}$.

$E = 5{,}0$ V et $f = 1{,}0$ Hz

COMPRENDRE
Les graduations sont données au dixième (« 6,0 », « 1,0 ») : on garde deux chiffres significatifs pour les valeurs lues.

1.2 Partie 1. Établir l'expression de l'intensité $i(t)$ en fonction de C et de $\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$.

L'intensité est le débit de charge sur l'armature du condensateur : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$.

Avec l'orientation de la figure 1 (convention récepteur), $q(t) = C\,u_C(t)$, et C est une constante :

$$i(t) = C\,\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

PIÈGE
Donner la formule sans les deux étapes. « Établir » demande $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ puis $q = C\,u_C$.

1.3.1 Partie 1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pendant la charge, lorsque $u_G(t) = E$.

Loi des mailles : $u_G(t) = u_C(t) + u_R(t)$, avec $u_G(t) = E$.

Loi d'Ohm : $u_R(t) = R\,i(t) = RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$ (question 1.2).

Donc $E = u_C(t) + RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$, soit en divisant par RC :

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement pour un circuit RC : loi des mailles, loi d'Ohm, relation $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, puis on ne garde que u_C et sa dérivée.

1.3.2 Partie 1. Vérifier que $u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)\right)$ est solution de l'équation différentielle.

On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{RC}\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$.

On calcule le membre de gauche de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \frac{E}{RC}$$

De plus $u_C(0) = E\,(1 - 1) = 0$: le condensateur est bien déchargé à $t = 0$ s.

Le membre de gauche vaut $\dfrac{E}{RC}$ à chaque instant : la fonction proposée est solution.

PIÈGE
Oublier le signe en dérivant : la dérivée de $-\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$ est $+\dfrac{1}{RC}\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$.

1.3.3 Partie 1. À partir de l'expression de $u_C(t)$, montrer que $u_R(t) = E\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$.

D'après la loi des mailles, $u_R(t) = E - u_C(t) = E - E\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)\right)$.

$$u_R(t) = E\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

1.4 Partie 1. Associer, en justifiant, les courbes 1 et 2 de la figure 2 aux tensions $u_C(t)$ et $u_R(t)$.

À $t = 0$ s : $u_C(0) = 0$ V et $u_R(0) = E = 5{,}0$ V.

Pendant la charge, u_C augmente et tend vers E, alors que u_R diminue et tend vers 0 V.

La courbe 2 part de 0 V et monte vers 5,0 V ; la courbe 1 part de 5,0 V et descend vers 0 V.

Courbe 1 : $u_R(t)$; courbe 2 : $u_C(t)$.

COMPRENDRE
À $t = 0{,}5$ s, la courbe 1 saute de 0 à -5 V : seule u_R peut être discontinue. La tension aux bornes d'un condensateur ne subit jamais de saut.

1.5 Partie 1. Estimer la valeur de la résistance R en explicitant la méthode.

Données utiles $C = 1\ \mu$F ; $E = 5{,}0$ V (1.1)

Le temps caractéristique du circuit est $\tau = RC$, donc $R = \dfrac{\tau}{C}$.

À $t = \tau$: $u_C(\tau) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = 0{,}63\,E = 0{,}63 \times 5{,}0 \approx 3{,}2$ V.

Sur la courbe 2, u_C atteint 3,2 V à la date $\tau \approx 0{,}1$ s.

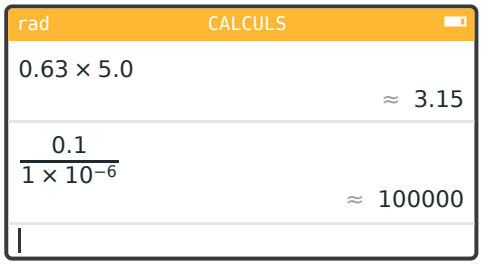
$$R = \frac{0{,}1}{1 \times 10^{-6}}$$

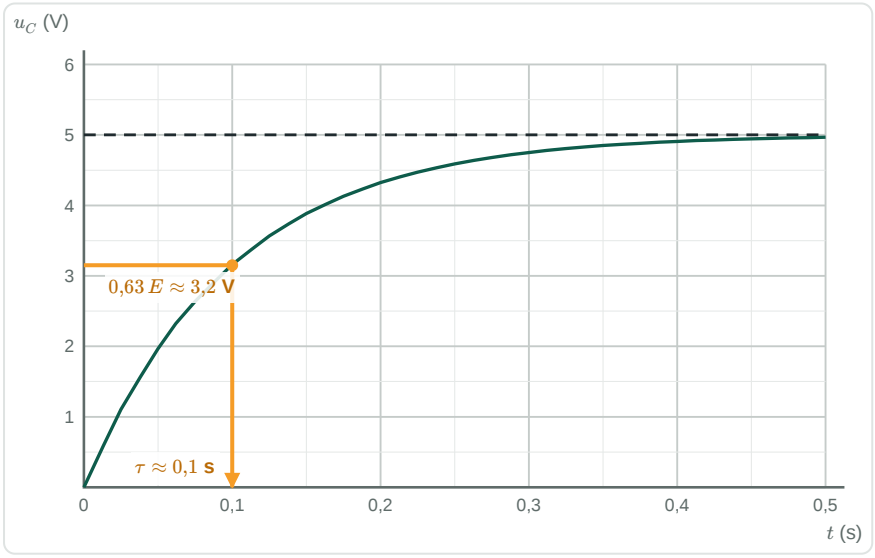
$R \approx 1 \times 10^5\ \Omega$, soit environ $100\ \text{k}\Omega$

PIÈGE
Laisser C en microfarads : $1\ \mu\text{F} = 1 \times 10^{-6}$ F.

MÉTHODE
Autre lecture possible sur la courbe 1 : $u_R(\tau) = 0{,}37\,E \approx 1{,}9$ V. On peut aussi tracer la tangente à l'origine, qui coupe l'asymptote $u_C = E$ à $t = \tau$.

À LA CALCULATRICE





1.5 · Courbe 2 (u_C) pendant la charge : lecture de la constante de temps

2.1 Partie 1. Sachant que $C = \varepsilon \dfrac{S}{e}$, comparer C_1 et C_2 en justifiant.

Les deux condensateurs ont la même constante ε et la même surface S : la capacité est inversement proportionnelle à l'écartement e des armatures.

Sur la figure 3 (MEMS accéléré), $e_1 < e_2$, donc $\dfrac{\varepsilon S}{e_1} > \dfrac{\varepsilon S}{e_2}$.

$\boxed{C_1 > C_2}$

2.2 Partie 1. Avec $C_1 = C\,(1 + k\,a_x)$ et $C_2 = C\,(1 - k\,a_x)$, donner le signe de a_x correspondant à la figure 3 et commenter.

$C_1 > C_2$ s'écrit $C\,(1 + k\,a_x) > C\,(1 - k\,a_x)$, soit $2\,k\,a_x > 0$. Comme $k > 0$:

$\boxed{a_x > 0}$

Commentaire : c'est cohérent avec la figure 3, où la flèche « accélération » est dans le sens de l'axe Ox. On a alors $C_1 > C > C_2$: l'écart entre les deux capacités renseigne sur la valeur et le sens de l'accélération.

COMPRENDRE
Quand le boîtier accélère vers la droite, la partie mobile, retenue par des ressorts, prend du retard par inertie : elle se décale vers la gauche par rapport à la partie fixe, d'où $e_1 < e_2$.

2.3 Partie 1. Donner la signification physique de V_0, calculer la variation de la tension de sortie pour une accélération de $40\,g$ suivant x, puis commenter.

Données utiles $V_{out} = V_0 + S\,a_x$; $S = 27\ \text{mV}/g$

Pour $a_x = 0$, $V_{out} = V_0$: V_0 est la tension de sortie du capteur en l'absence d'accélération suivant Ox (véhicule à l'arrêt ou à vitesse constante).

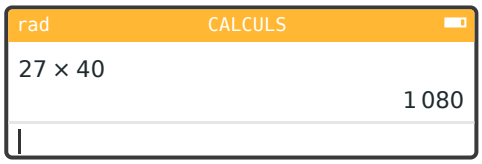
Variation de la tension de sortie : $\Delta V_{out} = V_{out} - V_0 = S\,a_x = 27 \times 40 = 1\,080$ mV.

$\boxed{\Delta V_{out} \approx 1{,}1\ \text{V}}$

Commentaire : une variation de l'ordre du volt est facile à mesurer et à distinguer des quelques dizaines de millivolts obtenues en conduite normale (accélérations inférieures à $1\,g$). Le circuit peut donc reconnaître un choc sans ambiguïté.

PIÈGE
Convertir g en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ est inutile : S est en mV par g et l'accélération en g, les g se simplifient.

À LA CALCULATRICE



1 Partie 2. À partir des images de la figure 4, évaluer en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ la vitesse de la voiture à son arrivée sur l'obstacle, en détaillant la démarche.

Données utiles deux mires consécutives sont distantes de 25 cm ; images aux dates -24 ms et 0 ms

Entre les deux premières images, il s'écoule $\Delta t = 24\ \mathrm{ms} = 24 \times 10^{-3}$ s.

Échelle : l'écart entre deux mires voisines de la carrosserie représente 25 cm.

On repère un même point de la voiture (la première mire de l'aile avant, ou le centre de la roue avant) sur les deux images : il avance d'environ 1,7 fois l'écart entre deux mires.

Distance parcourue : $d = 1{,}7 \times 0{,}25 \approx 0{,}43$ m.

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{1{,}7 \times 0{,}25}{24 \times 10^{-3}} \approx 18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

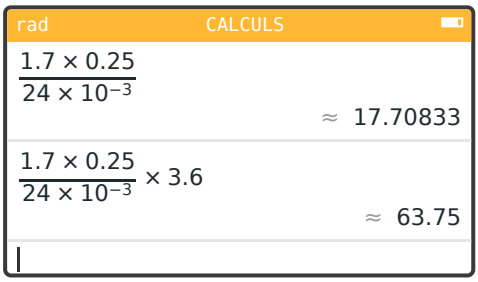
Conversion : $v = 17{,}7 \times 3{,}6$.

$v \approx 64\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ (valeur cohérente avec la figure 5 : environ $17{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ avant l'impact)

PIÈGE
Se tromper de mire d'une image à l'autre : elles se ressemblent toutes. Suivre un détail unique (roue, rétroviseur) évite de compter un intervalle en trop ou en moins.

COMPRENDRE
La mesure sur photo est peu précise : toute valeur entre 60 et 66 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, obtenue par une démarche claire, convient. Pour gagner en précision, mesurer à la règle dix intervalles de mires (2,50 m).

À LA CALCULATRICE



2.1 Partie 2. Caractériser le mouvement de la tête du mannequin pendant les 25 ms qui suivent l'impact.

Sur la figure 5, entre $t = 0$ et $t = 25$ ms, la vitesse de la tête reste constante, proche de $17{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, alors que celle de la voiture diminue déjà. La trajectoire de la tête est une droite horizontale.

Dans le référentiel du laboratoire, le mouvement de la tête est rectiligne uniforme.

COMPRENDRE
Rien ne retient encore la tête : d'après le principe d'inertie, elle garde sa vitesse pendant que l'habitacle ralentit. Elle avance donc vers le volant, d'où l'intérêt de l'airbag.

2.2 Partie 2. Schématiser sommairement la voiture à la date $t = 75$ ms et représenter, sans souci d'échelle, ses vecteurs vitesse et accélération.

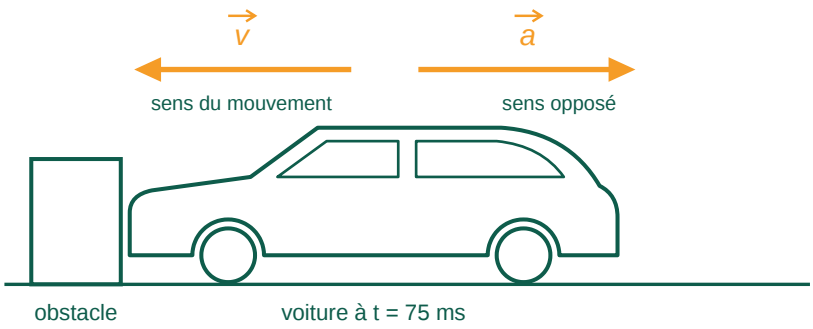
À $t = 75$ ms, la voiture avance encore vers l'obstacle ($v \approx 6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$) et sa vitesse diminue : le mouvement est rectiligne ralenti.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est horizontal, dans le sens du mouvement (vers l'obstacle).

Le vecteur accélération $\vec{a}$ a la même direction mais le sens opposé à $\vec{v}$.

$\vec{v}$ dirigé vers l'obstacle, $\vec{a}$ horizontal et de sens opposé (voir le schéma).

PIÈGE
Dessiner $\vec{a}$ dans le sens du mouvement. Quand un mobile ralentit en ligne droite, $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.



2.2 · Voiture à $t = 75$ ms : $\vec{v}$ vers l'obstacle, $\vec{a}$ en sens opposé

2.3 Partie 2. Estimer la valeur maximale de l'accélération subie par la tête du mannequin au cours du choc, en détaillant la démarche.

Données utiles figure 5 ; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

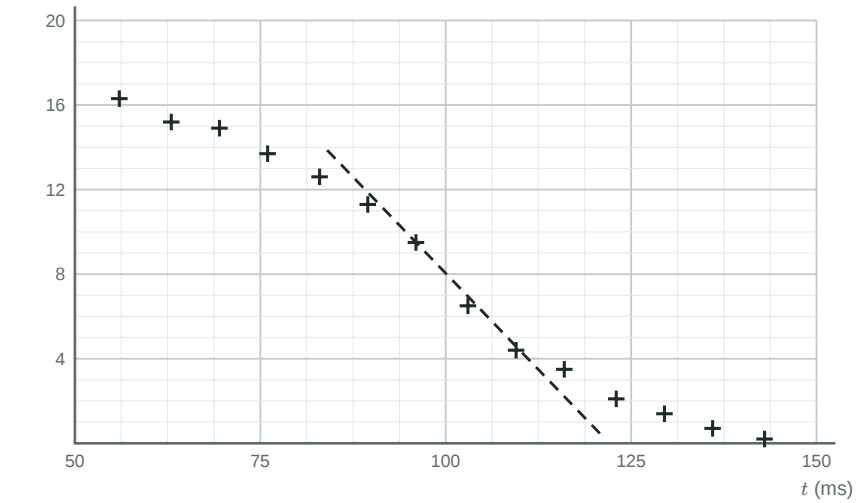
Le mouvement est rectiligne : la valeur de l'accélération est $a = \left|\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$, c'est-à-dire la pente (en valeur absolue) de la courbe $v(t)$ de la tête.

Elle est maximale là où la courbe descend le plus vite, autour de $t = 100$ ms. On y trace une droite qui suit au mieux les points : elle passe par (96 ms ; $9{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) et (110 ms ; $4{,}4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).

$$a_{max} \approx \frac{9{,}5 - 4{,}4}{(110 - 96) \times 10^{-3}} \approx 3{,}6 \times 10^{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

En unités de g : $\dfrac{3{,}6 \times 10^{2}}{9{,}81} \approx 37$.

$a_{max} \approx 3{,}6 \times 10^{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, soit environ $37\,g$ (ordre de grandeur : $40\,g$)



2.3 · Vitesse de la tête (figure 5) et droite tracée dans la zone la plus pentue

PIÈGE
Oublier de convertir les millisecondes en secondes, ou calculer une pente moyenne sur toute la décélération (de 60 à 143 ms) : on obtient alors une valeur moyenne, pas le maximum.

COMPRENDRE
C'est une estimation : selon la droite tracée, on trouve entre 35 et 50 g. Le correcteur attend la démarche (pente la plus forte, deux points lus, conversion en g) plus qu'une valeur précise.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{9.5 - 4.4}{(110 - 96) \times 1 \times 10^{-3}}$ ≈ 364.2857

$\dfrac{364}{9.81}$ ≈ 37.10499

2.4 Partie 2. La probabilité d'apparition d'une commotion cérébrale est-elle importante pour un conducteur lors d'un choc similaire à ce crash-test ? Justifier.

Données utiles $a_{max} \approx 37\,g$ (2.3) ; figure 6

Sur la figure 6, la zone de forte probabilité est située au-dessus de la courbe. Cette courbe limite décroît quand la durée augmente : environ $70\,g$ pour 10 ms, $57\,g$ pour 20 ms, et encore $44\,g$ pour 100 ms.

La tête subit son accélération maximale, voisine de $37\,g$, pendant une quinzaine de millisecondes seulement, et des accélérations plus faibles le reste du temps (la décélération complète dure moins de 100 ms).

Quelle que soit la durée retenue, le point représentant le choc est sous la courbe.

La tête reste hors de la zone de forte probabilité : le risque de commotion cérébrale n'est pas important lors de ce choc.

COMPRENDRE
La conclusion dépend de la valeur trouvée en 2.3. Avec une estimation haute (environ $50\,g$ maintenus plus de 35 ms), le point arrive sur la courbe limite : il faut alors conclure à un risque réel. L'essentiel est la cohérence.

MÉTHODE
Pour exploiter un graphique « zone de danger » : placer le point (durée ; accélération) et dire de quel côté de la courbe limite il se trouve.

1 Partie 3. Rappeler l'équation d'état du gaz parfait en précisant l'unité de chaque grandeur.

$$PV = nRT$$

- P : pression du gaz, en pascals (Pa) ;
- V : volume occupé par le gaz, en mètres cubes ($\mathrm{m^3}$) ;
- n : quantité de matière de gaz, en moles (mol) ;
- T : température absolue, en kelvins (K) ;
- R : constante des gaz parfaits, en $\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$.

2 Partie 3. Déterminer la quantité de matière de diazote qui gonfle un airbag de 60 L à 20 °C et à la pression atmosphérique.

Données utiles $P_0 = 101$ kPa ; $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$; $T(\mathrm{K}) = \theta(^\circ\mathrm{C}) + 273$

Conversions : $P_0 = 101 \times 10^3$ Pa ; $V = 60\ \mathrm{L} = 60 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$; $T = 20 + 273 = 293$ K.

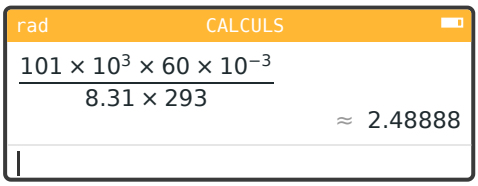
$$n(\mathrm{N_2}) = \frac{P_0 V}{RT} = \frac{101 \times 10^3 \times 60 \times 10^{-3}}{8{,}31 \times 293}$$

$$n(\mathrm{N_2}) \approx 2{,}5\ \mathrm{mol}$$

PIÈGE
Trois conversions à ne pas manquer : kPa en Pa, L en $\mathrm{m^3}$ ($1\ \mathrm{L} = 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$), °C en K.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme le volume (60 L). On garde la valeur non arrondie, 2,489 mol, pour les calculs suivants.

À LA CALCULATRICE



3 Partie 3. Montrer que la masse minimale d'azoture de sodium nécessaire est de 101 g, puis en déduire la masse minimale de nitrate de potassium que doit contenir la cartouche.

Données utiles $10\,\mathrm{NaN_3\,(s)} + 2\,\mathrm{KNO_3\,(s)} \longrightarrow 16\,\mathrm{N_2\,(g)} + \mathrm{K_2O\,(s)} + 5\,\mathrm{Na_2O\,(s)}$; $M(\mathrm{NaN_3}) = 65{,}0\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$; $M(\mathrm{KNO_3}) = 101{,}1\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$; $n(\mathrm{N_2}) = 2{,}489$ mol (2)

La transformation est totale. D'après les nombres stœchiométriques, 10 mol de $\mathrm{NaN_3}$ consommées donnent 16 mol de $\mathrm{N_2}$:

$$\frac{n(\mathrm{NaN_3})}{10} = \frac{n(\mathrm{N_2})}{16}$$

$$m(\mathrm{NaN_3}) = \frac{10}{16}\,n(\mathrm{N_2})\,M(\mathrm{NaN_3}) = \frac{10}{16} \times 2{,}489 \times 65{,}0 = 101\ \mathrm{g}$$

De même, 2 mol de $\mathrm{KNO_3}$ sont consommées pour 16 mol de $\mathrm{N_2}$ formées :

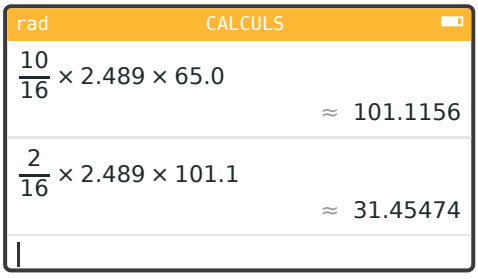
$$m(\mathrm{KNO_3}) = \frac{2}{16}\,n(\mathrm{N_2})\,M(\mathrm{KNO_3}) = \frac{2}{16} \times 2{,}489 \times 101{,}1 \approx 31\ \mathrm{g}$$

$m(\mathrm{NaN_3}) = 101$ g (valeur attendue : 101 g) et $m(\mathrm{KNO_3}) \approx 31$ g

PIÈGE
Utiliser $n(\mathrm{N_2}) = 2{,}5$ mol arrondi : on trouve alors 102 g et non 101 g. Dans un « montrer que », garder les valeurs intermédiaires non arrondies.

COMPRENDRE
« Minimale » signifie que les réactifs sont introduits dans les proportions stœchiométriques : aucun n'est en excès, et tout le diazote voulu est produit.

À LA CALCULATRICE



4 Partie 3. Les réactifs solides occupent 70 cm³. Expliquer l'intérêt de ce dispositif par rapport à du diazote stocké sous pression dans un réservoir à 20 °C.

Données utiles $V = 60$ L à $P_0 = 101$ kPa (2) ; $V' = 70\ \mathrm{cm^3} = 70 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^3}$

Les 2,5 mol de diazote occupent 60 L à la pression atmosphérique : impossible de loger un tel volume dans un volant.

Pour enfermer ce gaz dans un réservoir aussi petit que les réactifs solides ($V' = 70\ \mathrm{cm^3}$), à la même température, il faudrait une pression P' telle que $P'\,V' = P_0\,V$ (n et T inchangés) :

$$P' = \frac{P_0\,V}{V'} = \frac{101 \times 10^3 \times 60 \times 10^{-3}}{70 \times 10^{-6}} \approx 8{,}7 \times 10^7\ \mathrm{Pa}$$

soit environ 860 fois la pression atmosphérique.

Les réactifs solides stockent le diazote sous une forme environ 860 fois plus compacte (70 $\mathrm{cm^3}$ au lieu de 60 L), sans réservoir à très haute pression, lourd et dangereux, dans le volant.

COMPRENDRE
À une telle pression, le diazote ne se comporte plus vraiment comme un gaz parfait : le calcul ne donne qu'un ordre de grandeur, suffisant pour conclure.

À LA CALCULATRICE

