Corrigé complet — Bac 2022 Amérique du Nord Jour 1

Physique-chimie, enseignement de spécialité **20 points** **3 h 30**

Ex 1	**Indigo et carmin d'indigo** Réactif limitant et rendement · Oxydoréduction · Constante d'acidité · Indicateur coloré · Dosage par étalonnage · Dilution	10 pts	1 h 45	16 questions	p. 2
Ex 2	**L'épaisseur du matelas du saut à la perche** Énergies cinétique et potentielle · Conservation de l'énergie mécanique · Chute libre · Deuxième loi de Newton · Équations horaires · Langage Python	5 pts	53 min	12 questions	p. 8
Ex 3	**Des supercondensateurs pour recharger un bus électrique** Décharge d'un condensateur · Équation différentielle du circuit RC · Temps caractéristique · Capacité · Incertitude-type · Énergie et puissance électriques	5 pts	53 min	8 questions	p. 12
Ex 4	**Une exoplanète : 51PEG_b** Période d'un signal périodique · Troisième loi de Kepler · Analyse dimensionnelle · Lunette astronomique afocale · Grossissement · Pouvoir séparateur de l'œil	5 pts	53 min	8 questions	p. 16

Comment s'en servir. Fais d'abord le sujet en temps limité, puis corrige-toi exercice par exercice. À gauche de chaque question, sur les carreaux : ce qu'il faut écrire sur ta copie. À droite : les pièges, ce qu'il faut comprendre et les méthodes.

Indigo et carmin d'indigo

Bac 2022 Amérique du Nord Jour 1 · Exercice 1 **10 points** **Durée conseillée 1 h 45**

A.1 Sur le document réponse, entourer les groupes caractéristiques sur la formule topologique de l'indigo et nommer les familles fonctionnelles correspondantes.

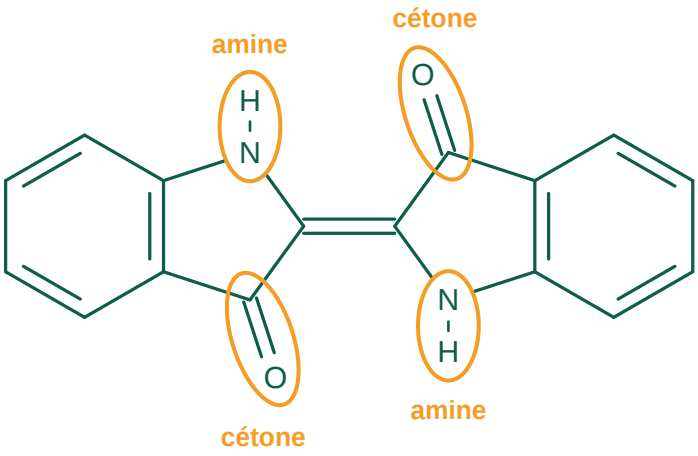
La molécule d'indigo porte deux types de groupes caractéristiques, chacun présent deux fois :

- le groupe carbonyle $\mathrm{C{=}O}$, dont le carbone est lié à deux atomes de carbone : famille des **cétones** ;
- le groupe amine $\mathrm{N{-}H}$: famille des **amines**.

Deux groupes carbonyle (famille des cétones) et deux groupes amine (famille des amines).

PIÈGE
Répondre « aldéhyde » pour $\mathrm{C{=}O}$: dans un aldéhyde, le carbone du groupe porte un atome d'hydrogène. Ici il est lié à deux carbones, donc c'est une cétone.

COMPRENDRE
Les cycles benzéniques et la double liaison $\mathrm{C{=}C}$ centrale ne sont pas des groupes caractéristiques au programme : on ne les entoure pas.



A.1 · Document réponse : groupes caractéristiques de l'indigo entourés et familles nommées

A.2 Déterminer les quantités de matière introduites de 2-nitrobenzaldéhyde et d'acétone.

Données utiles $m_1 = 0{,}50$ g ; $M_1 = 151{,}1$ g · mol^{-1} ; $V_2 = 5{,}0$ mL ; $\rho_2 = 1{,}05$ g · cm^{-3} ; $M_2 = 58{,}1$ g · mol^{-1}

2-nitrobenzaldéhyde (solide, indice 1) : $n_1 = \dfrac{m_1}{M_1} = \dfrac{0{,}50}{151{,}1} = 3{,}3 \times 10^{-3}$ mol

Acétone (liquide, indice 2) : sa masse est $m_2 = \rho_2 V_2$, avec $1\ \mathrm{cm^3} = 1\ \mathrm{mL}$, donc

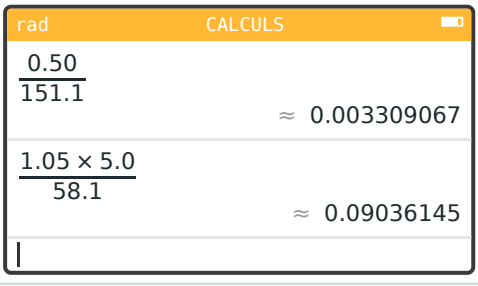
$$n_2 = \frac{\rho_2 V_2}{M_2} = \frac{1{,}05 \times 5{,}0}{58{,}1} = 9{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{mol}$$

$n_1 = 3{,}3 \times 10^{-3}$ mol et $n_2 = 9{,}0 \times 10^{-2}$ mol

PIÈGE
Convertir le volume en litres tout en gardant ρ en g · cm^{-3} : le résultat serait mille fois trop petit.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la masse $0{,}50$ g et le volume $5{,}0$ mL, qui sont les données les moins précises.

À LA CALCULATRICE



A.3 En supposant la transformation totale, identifier le réactif limitant et en déduire la masse maximale d'indigo qui peut être obtenue.

Données utiles n_1 et n_2 (A.2) ; $M_{\text{indigo}} = 262{,}3\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; ions hydroxyde en excès

Les deux réactifs ont le même nombre stœchiométrique, 2. On compare donc :

$\dfrac{n_1}{2} = 1{,}7\times10^{-3}\ \text{mol}$ et $\dfrac{n_2}{2} = 4{,}5\times10^{-2}\ \text{mol}$

$\dfrac{n_1}{2} < \dfrac{n_2}{2}$: le **2-nitrobenzaldéhyde** est le réactif limitant, et $x_{\max} = \dfrac{n_1}{2}$.

L'équation donne une mole d'indigo pour deux moles de 2-nitrobenzaldéhyde : $n_{\text{indigo}} = x_{\max}$.

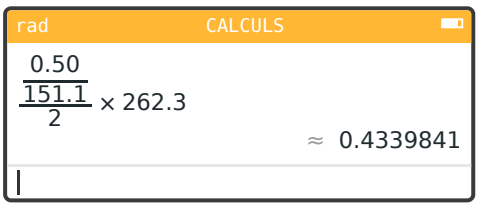
$$m_{\max} = \frac{n_1}{2}\times M_{\text{indigo}} = \frac{0{,}50}{2\times151{,}1}\times262{,}3 = 0{,}43\ \text{g}$$

Réactif limitant : 2-nitrobenzaldéhyde ; $m_{\max} = 0{,}43\ \text{g}$

PIÈGE
Oublier le nombre stœchiométrique 2 devant le 2-nitrobenzaldéhyde et écrire $n_{\text{indigo}} = n_1$: la masse trouvée serait doublée.

MÉTHODE
Réactif limitant : diviser chaque quantité initiale par son nombre stœchiométrique ; le plus petit quotient désigne le réactif limitant et donne $x_{\max}$.

À LA CALCULATRICE



A.4 Déterminer la valeur du rendement de la synthèse.

Données utiles $m_{\text{exp}} = 0{,}35\ \text{g}$; $m_{\max} = 0{,}43\ \text{g}$ (A.3)

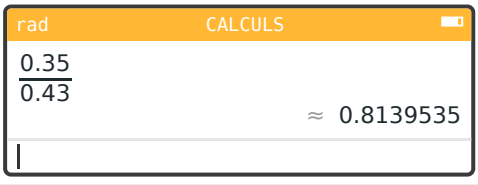
Le rendement compare la masse obtenue à la masse maximale :

$$\eta = \frac{m_{\text{exp}}}{m_{\max}} = \frac{0{,}35}{0{,}43} = 0{,}81$$

$\eta = 0{,}81$, soit $81\ \%$

COMPRENDRE
Un rendement inférieur à 100 % s'explique ici par les pertes lors de la filtration et des rinçages, ou par une transformation qui n'est pas terminée au bout de 5 min.

À LA CALCULATRICE



B.1 Écrire le couple oxydant-réducteur de l'indigo et la demi-équation électronique associée.

L'indigo Ind est la forme oxydée, IndH_2 la forme réduite : le couple s'écrit $\text{Ind}\,(\text{s})\ /\ \text{IndH}_2\,(\text{aq})$.

$\text{Ind}\,(\text{s}) + 2\,\text{H}^+\,(\text{aq}) + 2\,\text{e}^- = \text{IndH}_2\,(\text{aq})$

PIÈGE
Un couple s'écrit toujours oxydant / réducteur. Écrire IndH_2 / Ind inverse les rôles.

MÉTHODE
Demi-équation : équilibrer les atomes d'hydrogène avec H^+, puis les charges avec des électrons. Deux H gagnés, donc deux H^+ et deux électrons.

B.2 Établir l'équation de la réaction modélisant la transformation entre l'indigo et les ions dithionite.

Données utiles $S_2O_4^{2-}(aq) + 2\,H_2O(l) = 2\,SO_3^{2-}(aq) + 4\,H^+(aq) + 2\,e^-$

L'indigo est réduit, l'ion dithionite est oxydé :

$Ind(s) + 2\,H^+(aq) + 2\,e^- = IndH_2(aq)$

$S_2O_4^{2-}(aq) + 2\,H_2O(l) = 2\,SO_3^{2-}(aq) + 4\,H^+(aq) + 2\,e^-$

Chaque demi-équation met en jeu deux électrons : on les additionne membre à membre, puis on simplifie les ions H^+ (2 à gauche, 4 à droite).

$$Ind + S_2O_4^{2-} + 2\,H_2O \longrightarrow IndH_2 + 2\,SO_3^{2-} + 2\,H^+$$

PIÈGE
Laisser des H^+ des deux côtés ou des électrons dans l'équation finale. Vérifier les charges : -2 à gauche, $2 \times (-2) + 2 = -2$ à droite.

B.3 Nommer l'oxydant mis en jeu lorsque le tissu imprégné de $IndH_2$ est exposé à l'air.

$IndH_2$ est oxydé au contact de l'air : il cède des électrons à un oxydant présent dans l'air.

L'oxydant est le dioxygène O_2 de l'air.

C.1 Écrire l'équation de la réaction de l'acide HIn avec l'eau.

L'acide HIn cède un ion H^+ à l'eau, qui joue le rôle de base (couple H_3O^+ / H_2O).

$$HIn(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons In^-(aq) + H_3O^+(aq)$$

PIÈGE
Utiliser le couple H_2O / HO^- : face à un acide, l'eau est une base et se transforme en H_3O^+, pas en HO^-.

C.2 Déterminer le taux d'avancement final τ et le relier au caractère total ou non total de la transformation.

Données utiles $c = 1{,}0 \times 10^{-1}\ mol \cdot L^{-1}$; $pH = 6{,}3$; $V = 100{,}0\ mL$

Avancement final : $x_f = n(H_3O^+)_f = [H_3O^+]_f\,V = 10^{-pH}\,c^\circ\,V$.

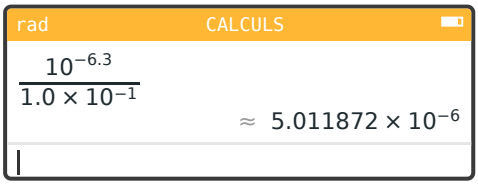
Avancement maximal (tout l'acide consommé) : $x_{max} = c\,V$.

$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}} = \frac{10^{-pH}\,c^\circ}{c} = \frac{10^{-6{,}3}}{1{,}0 \times 10^{-1}} = 5{,}0 \times 10^{-6}$$

$\tau = 5{,}0 \times 10^{-6} \ll 1$: la transformation est non totale (très limitée), HIn est un acide faible.

COMPRENDRE
Le volume V se simplifie : τ ne dépend que du pH et de c. Une transformation totale donnerait $\tau = 1$, donc un pH égal à $-\log c = 1{,}0$.

À LA CALCULATRICE



C.3 Montrer qu'à l'équilibre $K_A = \dfrac{(10^{-\mathrm{pH}})^2}{(c - 10^{-\mathrm{pH}}) \times c^\circ}$, avec $c^\circ = 1\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$.

Pour la réaction de C.1, la constante d'acidité s'écrit :

$$K_A = \frac{[\mathrm{In^-}]_{\text{éq}} \times [\mathrm{H_3O^+}]_{\text{éq}}}{[\mathrm{HIn}]_{\text{éq}} \times c^\circ}$$

Cette réaction étant la seule, elle forme autant d'ions $\mathrm{In^-}$ que d'ions $\mathrm{H_3O^+}$: $[\mathrm{In^-}]_{\text{éq}} = [\mathrm{H_3O^+}]_{\text{éq}} = 10^{-\mathrm{pH}}$ (en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$).

Conservation de la matière : l'acide apporté est soit resté HIn, soit devenu $\mathrm{In^-}$, donc $[\mathrm{HIn}]_{\text{éq}} = c - [\mathrm{In^-}]_{\text{éq}} = c - 10^{-\mathrm{pH}}$.

En remplaçant :

$K_A = \dfrac{(10^{-\mathrm{pH}})^2}{(c - 10^{-\mathrm{pH}}) \times c^\circ}$, qui est bien l'expression attendue.

PIÈGE
Écrire $[\mathrm{HIn}]_{\text{éq}} = c$ sans justifier : la concentration apportée c n'est pas la concentration à l'équilibre, même si l'écart est ici très faible.

MÉTHODE
Pour un « montrer que » sur K_A : 1) quotient de réaction à l'équilibre ; 2) égalité des concentrations des produits ; 3) conservation de la matière pour l'acide restant.

C.4 Déterminer la valeur de la constante d'acidité K_A du couple HIn / $\mathrm{In^-}$. En déduire la valeur de son $\mathrm{p}K_A$.

Données utiles $\mathrm{pH} = 6{,}3$; $c = 1{,}0 \times 10^{-1}\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$; $c^\circ = 1\ \mathrm{mol \cdot L^{-1}}$

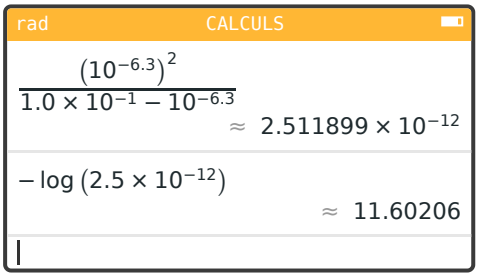
$$K_A = \frac{(10^{-6{,}3})^2}{(1{,}0 \times 10^{-1} - 10^{-6{,}3}) \times 1} = 2{,}5 \times 10^{-12}$$

$$\mathrm{p}K_A = -\log K_A = -\log(2{,}5 \times 10^{-12}) = 11{,}6$$

$K_A = 2{,}5 \times 10^{-12}$ et $\mathrm{p}K_A = 11{,}6$

COMPRENDRE
K_A est sans unité. Comme $10^{-\mathrm{pH}} \ll c$, on a pratiquement $K_A = (10^{-\mathrm{pH}})^2 / c$, soit $\mathrm{p}K_A = 2\,\mathrm{pH} + \log c = 12{,}6 - 1{,}0$.

À LA CALCULATRICE



C.5 Tracer le diagramme de prédominance du carmin d'indigo avec les espèces et leur couleur. Discuter de son utilisation pour le titrage d'un acide chlorhydrique par une solution d'hydroxyde de sodium.

Données utiles $\mathrm{p}K_A = 11{,}6$ (C.4) ; courbe $\mathrm{pH} = f(V)$ du titrage

Pour $\mathrm{pH} < \mathrm{p}K_A$, la forme acide HIn (bleue) prédomine ; pour $\mathrm{pH} > \mathrm{p}K_A$, c'est la forme basique $\mathrm{In^-}$ (jaune). Le changement de teinte se produit autour de $\mathrm{pH} = 11{,}6$.

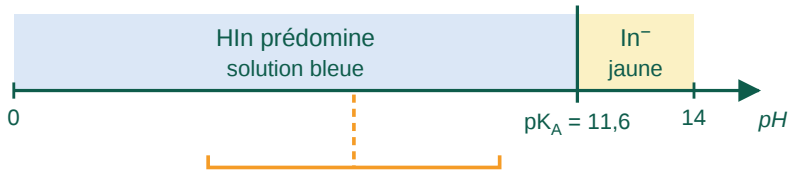
Sur la courbe de titrage, le saut de pH a lieu à $V_E = 10$ mL : le pH passe d'environ 4 à environ 10, avec $\mathrm{pH}_E \approx 7$.

Un indicateur convient si sa zone de virage est contenue dans le saut de pH. Ici, juste après l'équivalence, le pH vaut environ 10 : la solution est encore bleue. Le pH n'approche $11{,}6$ que bien plus tard et très lentement (il vaut à peine $11{,}5$ à $V = 20$ mL).

Le carmin d'indigo n'est pas adapté à ce titrage : son virage ($\mathrm{pH} \approx 11{,}6$) se situe hors du saut de pH.

PIÈGE
Se contenter du diagramme. La question demande aussi une discussion : il faut lire des valeurs de pH sur la courbe et conclure.

MÉTHODE
Choix d'un indicateur coloré : repérer le saut de pH et pH_E sur la courbe, puis vérifier que la zone de virage (autour du $\mathrm{p}K_A$ de l'indicateur) est à l'intérieur du saut.



C.5 · Diagramme de prédominance du carmin d'indigo, comparé au saut de pH du titrage

D.1 Déterminer la longueur d'onde adaptée à la réalisation du dosage spectrophotométrique dans le domaine visible.

On règle le spectrophotomètre sur la longueur d'onde du maximum d'absorption. Dans le visible (400 nm à 800 nm), le spectre présente un seul pic, dont le sommet est à environ 610 nm.

$\lambda_{\max} \approx 610 \text{ nm}$

PIÈGE
Choisir le pic le plus haut du spectre, vers 290 nm : il est dans l'ultraviolet, hors du domaine visible demandé.

COMPRENDRE
Au maximum d'absorption, l'absorbance est la plus grande et varie peu avec λ : les mesures sont plus précises.

D.2 Justifier la couleur du carmin d'indigo.

Le carmin d'indigo absorbe surtout les radiations voisines de 610 nm, c'est-à-dire dans l'orange (620 nm sur le cercle chromatique).

La couleur perçue est la couleur complémentaire de la couleur absorbée, diamétralement opposée sur le cercle chromatique : en face de l'orange se trouve le bleu.

La solution absorbe dans l'orange, elle apparaît donc bleue.

PIÈGE
Confondre couleur absorbée et couleur perçue : une solution bleue n'absorbe pas le bleu, elle le laisse passer.

D.3 Décrire le protocole pour préparer 50 mL de la solution S_3 à partir de la solution mère S_m.

Données utiles $c_m = 80{,}0 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$; $c_3 = 40{,}0 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$; $V_3 = 50$ mL ; verrerie disponible

Lors d'une dilution, la masse de soluté se conserve : $c_m V_m = c_3 V_3$, donc

$$V_m = \frac{c_3 V_3}{c_m} = \frac{40{,}0 \times 50}{80{,}0} = 25 \text{ mL}$$

Protocole :

- verser un peu de solution mère S_m dans un bécher de 50 mL ;
- prélever 25 mL de S_m avec la pipette jaugée de 25 mL, munie d'une propipette ;
- les introduire dans la fiole jaugée de 50 mL ;
- ajouter de l'eau distillée aux trois quarts, agiter ;
- compléter à l'eau distillée jusqu'au trait de jauge, boucher et homogénéiser.

Prélever $V_m = 25$ mL à la pipette jaugée de 25 mL, puis compléter à 50 mL dans la fiole jaugée de 50 mL.

PIÈGE
Prélever avec une éprouvette graduée ou préparer la solution dans un bécher : seule la verrerie jaugée (pipette, fiole) garantit la précision de la concentration.

COMPRENDRE
Le facteur de dilution vaut $c_m/c_3 = 2$: la fiole doit avoir un volume double de celui de la pipette.

D.4 Déterminer le volume de la solution S que l'on peut injecter sans danger en une journée à un patient de 70 kg.

Données utiles tableau des absorbances de S_1 à S_5 ; S diluée 200 fois donne S_d, d'absorbance $A = 0{,}75$; DJA $= 5{,}0$ mg par jour et par kg ; $m_{\text{patient}} = 70$ kg

Droite d'étalonnage. On place les cinq points $(c_m\,;A)$ sur le papier millimétré : ils sont alignés avec l'origine, la loi de Beer-Lambert $A = k\,c_m$ est vérifiée. La droite tracée passe par l'origine et par le point $(40{,}0\,;0{,}80)$:

$$k = \frac{0{,}80}{40{,}0} = 0{,}020\ \text{L}\cdot\text{mg}^{-1}$$

Concentration de la solution diluée S_d. $c_d = \dfrac{A}{k} = \dfrac{0{,}75}{0{,}020} = 37{,}5\ \text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ (valeur retrouvée par lecture graphique).

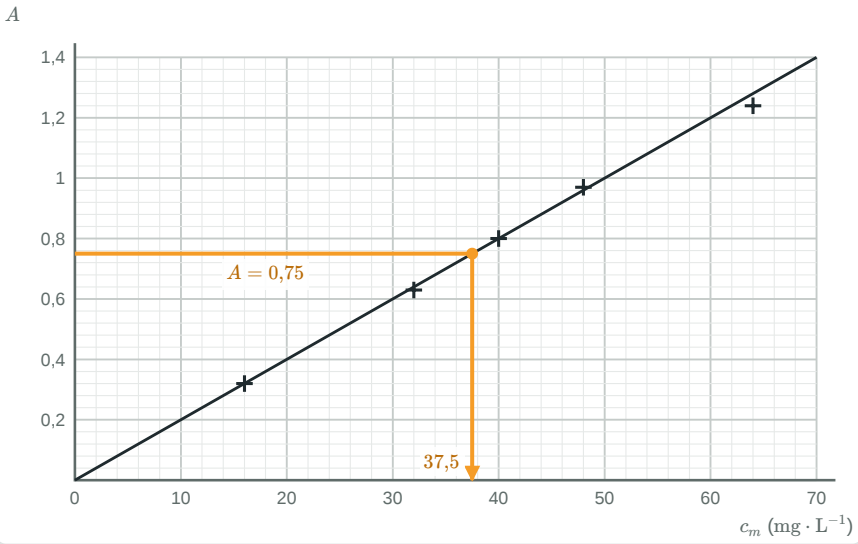
Concentration de la solution S. Elle est 200 fois plus concentrée :

$$c_S = 200 \times 37{,}5 = 7{,}5\times10^{3}\ \text{mg}\cdot\text{L}^{-1} = 7{,}5\ \text{g}\cdot\text{L}^{-1}$$

Masse maximale par jour. $m_{\max} = \text{DJA}\times m_{\text{patient}} = 5{,}0\times70 = 3{,}5\times10^{2}\ \text{mg}$

Volume maximal. $V_{\max} = \dfrac{m_{\max}}{c_S} = \dfrac{3{,}5\times10^{2}}{7{,}5\times10^{3}} = 4{,}7\times10^{-2}\ \text{L}$

On peut injecter au maximum $V_{\max} \approx 47\ \text{mL}$ de solution S par jour.



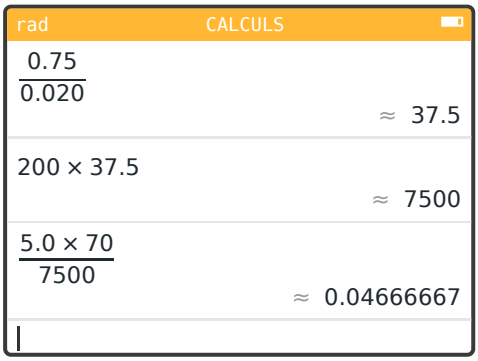
D.4 · Droite d'étalonnage tracée sur le papier millimétré et lecture pour $A = 0{,}75$

PIÈGE
Oublier la dilution : l'absorbance mesurée est celle de S_d, pas de S. Sans le facteur 200, on trouverait un volume de plus de 9 L.

COMPRENDRE
Selon la droite tracée, c_d se lit entre 37 et 38 mg · L^{-1} et le volume vaut 46 à 47 mL : toute valeur de cet ordre, obtenue par une démarche cohérente, est acceptée.

MÉTHODE
Question ouverte : annoncer les étapes (étalonnage, concentration diluée, concentration réelle, masse autorisée, volume) et garder les masses dans la même unité du début à la fin.

À LA CALCULATRICE



L'épaisseur du matelas du saut à la perche

Bac 2022 Amérique du Nord Jour 1 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

A.1 Identifier, parmi les courbes A et B, celle de l'énergie cinétique et celle de l'énergie potentielle de pesanteur. Justifier.

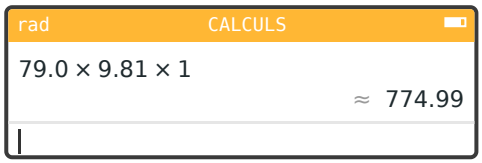
Pendant l'ascension, l'altitude z de l'athlète ne cesse d'augmenter, donc $E_{pp} = m\,g\,z$ augmente sans cesse : seule la courbe B est toujours croissante.

Au départ, l'athlète arrive de sa course d'élan avec sa vitesse la plus grande, puis il ralentit : $E_c = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2$ est maximale au début et quasi nulle au sommet, comme la courbe A.

Courbe A : énergie cinétique E_c. Courbe B : énergie potentielle de pesanteur E_{pp}.

MÉTHODE
On peut confirmer avec le programme : à $t = 0$, $z = 1$ m donne $E_{pp} = 79{,}0 \times 9{,}81 \times 1 \approx 775$ J, ordonnée du premier point de la courbe B.

À LA CALCULATRICE



A.2 Recopier et compléter les lignes 27 et 28 du programme.

Ligne 27 : `Ec[i]=0.5*m*v[i]**2`

Ligne 28 : `Epp[i]=m*g*z[i]`

`Ec[i]=0.5*m*v[i]**2` et `Epp[i]=m*g*z[i]`

PIÈGE
Oublier l'indice `[i]` : `v` et `z` sont des tableaux, le calcul se fait valeur par valeur dans la boucle. Le carré s'écrit `**2` en Python, pas `^2` .

A.3 Extraire du programme la valeur de la vitesse initiale d'Armand Duplantis.

La vitesse initiale est la première valeur du tableau `v` (ligne 16), associée à $t = 0$ s, première valeur du tableau `t` (ligne 14).

$v_0 = 10{,}063\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

COMPRENDRE
En Python, cette valeur est `v[0]` : les indices d'un tableau commencent à 0.

A.4 Identifier, parmi les trois situations proposées, celle qui correspond à $t = 0{,}9$ s. Justifier.

Sur le graphique, la courbe $E_{pe}(t)$ passe par son maximum (environ 2 700 J) à $t = 0{,}9$ s.

Or l'énergie potentielle élastique augmente avec la déformation de la perche : à cet instant, la perche est la plus pliée.

C'est la situation 2, celle où la perche est la plus courbée.

COMPRENDRE
Situation 1 : la perche commence à se plier (E_{pe} croît). Situation 3 : la perche est presque redressée, elle a restitué son énergie (E_{pe} proche de zéro, fin du mouvement).

A.5 En exploitant le graphique, déterminer l'altitude maximale z_A atteinte par le centre de masse de l'athlète.

Données utiles $m = 79{,}0$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$

L'altitude est maximale quand E_{pp} (courbe B) est maximale : au dernier point, à $t = 2{,}0$ s, on lit $E_{pp,A} \approx 4{,}7 \times 10^3$ J.

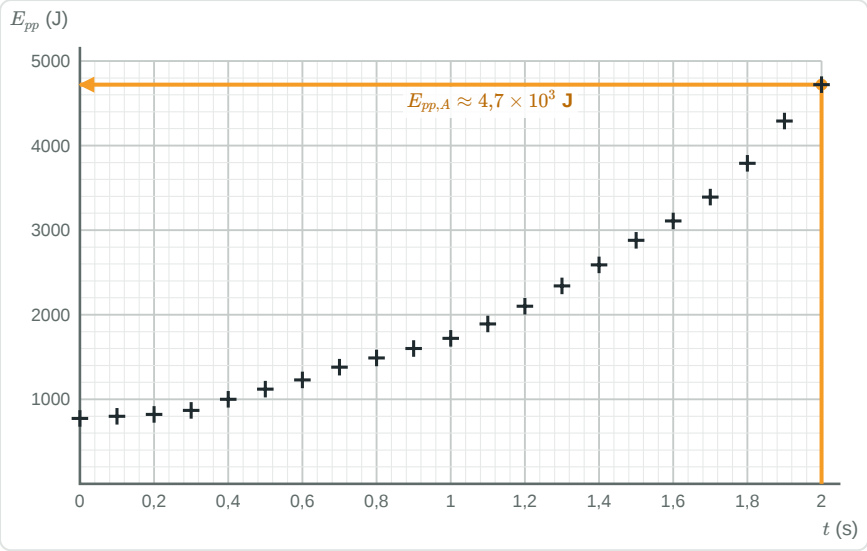
Comme $E_{pp,A} = m\,g\,z_A$:

$$z_A = \frac{E_{pp,A}}{m\,g} = \frac{4{,}7 \times 10^3}{79{,}0 \times 9{,}81} = 6{,}1\ \text{m}$$

$z_A \approx 6{,}1$ m

PIÈGE
Lire le maximum sur la mauvaise courbe, ou utiliser $E_m = 4\,775$ J : au sommet, il reste un peu d'énergie cinétique.

COMPRENDRE
La lecture graphique ne donne que deux chiffres significatifs : le résultat aussi. Il est cohérent avec la barre à 6,18 m, le centre de masse passant légèrement au-dessous.



A.5 · Courbe B du sujet (valeurs relevées), avec la lecture du maximum

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{4.7 \times 10^3}{79.0 \times 9.81}$

$\approx$ 6.064594

B.1 Justifier qu'après le franchissement de la barre, l'athlète est en chute libre.

Après la barre, l'athlète a lâché la perche et l'action de l'air est négligée : la seule force qui s'exerce sur lui est son poids $\vec{P}$.

Un système soumis uniquement à son poids est en chute libre.

PIÈGE
« Chute libre » ne veut pas dire « chute sans vitesse initiale » ni « chute verticale » : la définition porte uniquement sur les forces.

B.2 À l'aide du théorème de l'énergie cinétique ou de la conservation de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse d'impact de l'athlète sur le tapis en fonction de g, z_A et z_B.

Système {athlète}, référentiel terrestre supposé galiléen. En chute libre, seul le poids, force conservative, travaille : l'énergie mécanique se conserve entre A (sommet, $v_A = 0$) et B (impact).

$$E_m(B) = E_m(A) \iff \frac{1}{2} m v_B^2 + m g z_B = 0 + m g z_A$$

D'où $\frac{1}{2} m v_B^2 = m g (z_A - z_B)$, soit $v_B^2 = 2 g (z_A - z_B)$.

$$v_B = \sqrt{2 g (z_A - z_B)}$$

COMPRENDRE
La masse se simplifie : la vitesse d'impact ne dépend que de la hauteur de chute.

MÉTHODE
Avec le théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{AB}(\vec{P}) = m g (z_A - z_B)$. Même résultat, une seule méthode suffit.

B.3 Calculer la valeur de la vitesse d'impact de l'athlète.

Données utiles $z_A - z_B = 5{,}31$ m ; $g = 9{,}81$ N · kg^{-1} ; expression de v_B (B.2)

$$v_B = \sqrt{2 g (z_A - z_B)} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 5{,}31}$$

$$v_B = 10{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

COMPRENDRE
Environ $37 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. On retrouve la valeur absolue de $v_{0z} = -10{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donnée dans la partie C.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\sqrt{2 \times 9.81 \times 5.31}$

$\approx$ 10.20697

10.2×3.6

$\approx$ 36.72

C.1 Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'athlète lors de la réception puis, avec la seconde loi de Newton, démontrer que $F_T = 8{,}52$ kN.

Données utiles $m = 79{,}0$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $a_z = 10 \times g$

Système {athlète}, référentiel terrestre supposé galiléen. Forces : le poids $\vec{P}$, vertical vers le bas, de valeur $m\,g$; l'action du tapis $\vec{F_T}$, verticale vers le haut.

Seconde loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F_T} = m\,\vec{a}$.

En projetant sur l'axe (Oz), orienté vers le haut : $-m\,g + F_T = m\,a_z$.

$$F_T = m\,(a_z + g) = m\,(10\,g + g) = 11\,m\,g$$

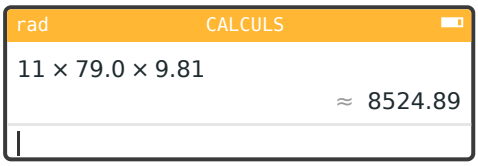
$$F_T = 11 \times 79{,}0 \times 9{,}81 = 8{,}52 \times 10^3\ \text{N}$$

$F_T = 8{,}52 \times 10^3\ \text{N} = 8{,}52\ \text{kN}$, valeur attendue.

PIÈGE
Écrire $F_T = m\,a_z = 10\,m\,g$ en oubliant le poids : on trouve 7,75 kN. Le tapis doit compenser le poids et, en plus, freiner l'athlète.

COMPRENDRE
L'athlète descend mais ralentit : son accélération est vers le haut, d'où $a_z > 0$ alors que $v_z < 0$.

À LA CALCULATRICE



C.2 En prenant l'instant du contact avec le tapis comme origine des temps, montrer que $v_z(t) = 10\,g\,t + v_{0z}$ et $z(t) = 5\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + z_B$.

Les forces sont constantes, donc l'accélération l'est aussi : $a_z = 10\,g$.

Comme $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$, on cherche une primitive : $v_z(t) = 10\,g\,t + C_1$.

À $t = 0$, $v_z(0) = v_{0z}$, donc $C_1 = v_{0z}$: $\quad v_z(t) = 10\,g\,t + v_{0z}$.

Comme $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, on cherche une primitive : $z(t) = \dfrac{1}{2} \times 10\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + C_2$.

À $t = 0$, le centre de masse est à l'altitude z_B, donc $C_2 = z_B$.

$v_z(t) = 10\,g\,t + v_{0z}$ et $z(t) = 5\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + z_B$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration ou ne pas les justifier par les conditions initiales : c'est ce que la question évalue.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : accélération, primitive, constante fixée par la condition initiale ; puis on recommence pour passer de la vitesse à la position.

C.3 Déterminer la durée de la phase de réception.

Données utiles $v_{0z} = -10{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $v_z(t)$ (C.2)

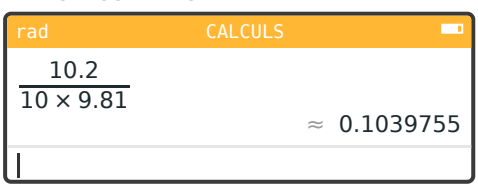
La réception se termine à l'instant t_f où l'athlète est arrêté : $v_z(t_f) = 0$.

$$10\,g\,t_f + v_{0z} = 0 \iff t_f = \frac{-v_{0z}}{10\,g} = \frac{10{,}2}{10 \times 9{,}81}$$

$t_f = 0{,}104\ \text{s}$

PIÈGE
Perdre le signe de v_{0z} et trouver une durée négative. Ne pas chercher $z(t) = 0$: la réception s'achève quand la vitesse s'annule, pas quand l'athlète touche le sol.

À LA CALCULATRICE



C.4 Le tapis a une épaisseur de 82 cm. Montrer que cette épaisseur est suffisante pour que l'athlète ne soit pas blessé par le sol.

Données utiles $t_f = 0{,}104$ s (C.3) ; $v_{0z} = -10{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $z(t)$ (C.2) ; épaisseur du tapis : 0,82 m

Pendant la réception, l'altitude du centre de masse varie de $z(t_f) - z_B = 5\,g\,t_f^2 + v_{0z}\,t_f$.

$$z(t_f) - z_B = 5 \times 9{,}81 \times 0{,}104^2 - 10{,}2 \times 0{,}104 = -0{,}53\ \text{m}$$

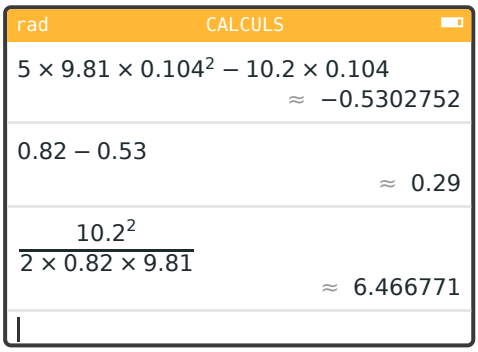
L'athlète s'enfonce donc de 53 cm dans le tapis avant de s'arrêter. Au contact, il est au niveau du dessus du tapis ($z_B = 0{,}82$ m) : $z(t_f) = 0{,}82 - 0{,}53 = 0{,}29$ m.

Enfoncement de $0{,}53\ \text{m} < 0{,}82\ \text{m}$: l'athlète s'arrête 29 cm au-dessus du sol, l'épaisseur est suffisante.

COMPRENDRE

C'est le cas le plus favorable : avec une accélération plus faible que $10\,g$, l'athlète s'enfonce davantage. Une accélération de $6{,}5\,g$ environ suffirait à lui faire atteindre le sol.

À LA CALCULATRICE



Des supercondensateurs pour recharger un bus électrique

Bac 2022 Amérique du Nord Jour 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

A.1 Montrer qu'au cours de la décharge l'intensité s'écrit $i(t) = -C \times \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$.

Sur le schéma, la flèche de i sort de l'armature positive, qui porte la charge $q(t)$: le courant emporte cette charge, donc

$$i(t) = -\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

Pour un condensateur, $q(t) = C \times u_C(t)$, avec C constante.

$$\boxed{i(t) = -\frac{\mathrm{d}\left(C\,u_C(t)\right)}{\mathrm{d}t} = -C \times \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}}$$

PIÈGE

Écrire par habitude $i = +\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Cette relation suppose que i arrive sur l'armature qui porte q. Ici i en repart : il faut le signe « $-$ » et le justifier avec le schéma.

COMPRENDRE

Pendant la décharge, u_C diminue : sa dérivée est négative et i est donc positive. Le courant circule réellement dans le sens de la flèche.

A.2 En déduire que la tension $u_C(t)$ obéit à l'équation différentielle $RC \times \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0$.

Interrupteur fermé, la loi des mailles donne, avec les flèches du schéma : $u_C(t) = u_R(t)$.

Loi d'Ohm pour le conducteur ohmique : $u_R(t) = R \times i(t)$.

Avec l'expression de $i(t)$ (A.1) : $u_C(t) = -RC \times \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$, soit

$$\boxed{RC \times \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0}$$

MÉTHODE

Toujours les trois mêmes étapes : loi des mailles, loi d'Ohm, relation entre i et u_C. On remplace ensuite pour ne garder que u_C et sa dérivée.

A.3 La solution est de la forme $u_C(t) = A + B \times \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$. Déterminer, en détaillant la démarche, les valeurs de A et B.

Données utiles $u_C(0) = E = 2{,}7$ V

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{B}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$RC \times \left(-\frac{B}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) + A + B\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = 0 \quad \text{soit} \quad A = 0$$

Condition initiale : $u_C(0) = A + B \times \mathrm{e}^0 = B$, or $u_C(0) = E$, donc $B = E$.

$\boxed{A = 0 \text{ V et } B = E = 2{,}7 \text{ V, d'où } u_C(t) = E\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}}$

COMPRENDRE

A est la tension au bout d'un temps très long : le condensateur est alors déchargé, donc $A = 0$. Ce raisonnement physique est accepté à la place du report dans l'équation.

A.4 Déterminer le temps caractéristique τ de la décharge, en faisant apparaître la construction graphique sur le document réponse.

Données utiles $E = 2{,}7$ V ; courbe $u_C(t)$ du document réponse

Avec $\tau = RC$: $u_C(\tau) = E\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37 \times E$.

$u_C(\tau) = 0{,}37 \times 2{,}7 = 1{,}0$ V

On trace l'horizontale d'ordonnée $1{,}0$ V jusqu'à la courbe, puis on descend à la verticale jusqu'à l'axe des temps.

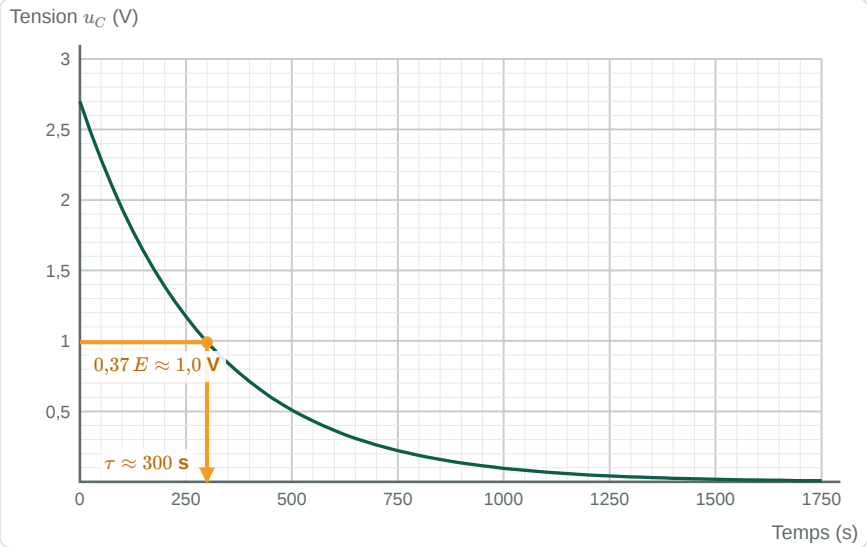
$\boxed{\tau \approx 3{,}0 \times 10^2 \text{ s}}$

PIÈGE

Lire le temps pour lequel u_C vaut 37 % de l'échelle (ou 63 % de E, valeur réservée à la charge). Une graduation vaut 50 s sur l'axe des temps.

MÉTHODE

Autre construction possible : la tangente à l'origine coupe l'axe des temps en $t = \tau$. Elle est moins précise, car le tracé de la tangente est délicat.



À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.37×2.7

≈ 0.999

A.4 · Document réponse complété : lecture de τ à 37 % de la tension initiale

A.5 En déduire la valeur de la capacité du supercondensateur. Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

Données utiles $\tau = 3{,}0 \times 10^2$ s (A.4) ; $R = 100\ \text{m}\Omega$

$\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$

$$C = \frac{3{,}0 \times 10^2}{100 \times 10^{-3}} = 3{,}0 \times 10^3 \text{ F}$$

Les condensateurs usuels du laboratoire ont des capacités allant du nanofarad au millifarad : celle-ci est au moins un million de fois plus grande, ce qui justifie le nom de supercondensateur.

$C = 3{,}0 \times 10^3$ F

PIÈGE
Oublier de convertir R : $100\ \text{m}\Omega = 0{,}100\ \Omega$. Sans conversion, on trouve 3 F, mille fois trop petit.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs : τ est lu sur un graphique et n'est connu qu'à quelques dizaines de secondes près.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{3.0 \times 10^2}{100 \times 10^{-3}}$

≈ 3000

A.6 Calculer $u(C)$ et écrire le résultat de la mesure avec son incertitude-type. Comparer à la valeur de référence du constructeur $C_{\text{réf}} = 3000$ F.

Données utiles $C = 3{,}0 \times 10^3$ F (A.5) ; $\tau = 3{,}0 \times 10^2$ s (A.4) ; $u(\tau) = 25$ s ; $R = 100\ \text{m}\Omega$; $u(R) = 2\ \text{m}\Omega$

$$u(C) = 3{,}0 \times 10^3 \times \sqrt{\left(\frac{25}{3{,}0 \times 10^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{100}\right)^2} = 2{,}6 \times 10^2 \text{ F}$$

On garde un seul chiffre significatif, arrondi par excès : $u(C) = 3 \times 10^2$ F.

Comparaison : $\dfrac{|C - C_{\text{réf}}|}{u(C)} = \dfrac{|3{,}0 \times 10^3 - 3000|}{3 \times 10^2} = 0$, valeur inférieure à 2. La mesure est compatible avec la valeur du constructeur.

$C = (3{,}0 \pm 0{,}3) \times 10^3$ F, en accord avec $C_{\text{réf}} = 3000$ F

PIÈGE
Écrire $C = 3000 \pm 257$ F. Le dernier chiffre de la valeur doit avoir le même rang que celui de l'incertitude : ici la centaine de farads.

COMPRENDRE
Une lecture $\tau = 290$ s donnerait $C = 2{,}9 \times 10^3$ F et un écart de 0,3 incertitude-type : la conclusion est la même. L'écart reste très inférieur à $2\,u(C)$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$3.0 \times 10^3 \times \sqrt{\left(\frac{25}{3.0 \times 10^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{100}\right)^2} \approx 257.0992$$

B.1 Déterminer la valeur de l'intensité maximale $I_{\max}$ lors de la phase de décharge. Commenter.

Données utiles $C_{\text{totem}} = 20$ F ; $E_{\text{totem}} = 760$ V ; courbe $u_C(t)$ du condensateur totem

D'après A.1, $i(t) = -C_{\text{totem}} \times \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: l'intensité est maximale quand la courbe descend le plus vite, c'est-à-dire à $t = 0$.

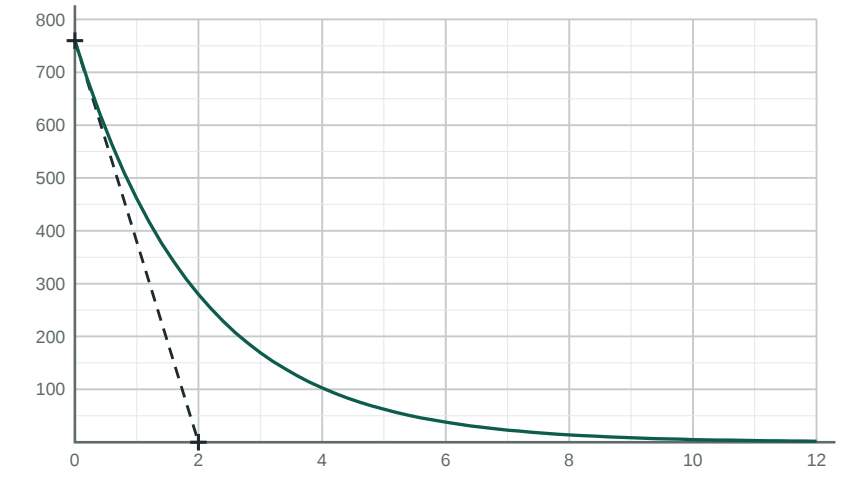
La dérivée en $t = 0$ est le coefficient directeur de la tangente à l'origine. Cette tangente passe par les points $(0\ \text{s}; 760\ \text{V})$ et $(2{,}0\ \text{s}; 0\ \text{V})$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \frac{0 - 760}{2{,}0 - 0} = -3{,}8 \times 10^2\ \text{V} \cdot \text{s}^{-1}$$

$I_{\max} = -20 \times (-3{,}8 \times 10^2) = 7{,}6 \times 10^3$ A

Ce résultat confirme l'énoncé, qui annonce plusieurs milliers d'ampères en début de transfert. Une telle intensité impose une connexion parfaitement sécurisée.

$I_{\max} = 7{,}6 \times 10^3$ A



B.1 · Tangente à l'origine : elle coupe l'axe des temps à $t = 2{,}0$ s

PIÈGE

Reprendre $R = 100\ \text{m}\Omega$ de la partie A sans justification : la résistance de cette décharge n'est pas donnée, il faut exploiter la courbe.

MÉTHODE

Vérification : la tangente à l'origine coupe l'axe en $\tau = 2{,}0$ s, donc $R = \dfrac{\tau}{C_{\text{totem}}} = 0{,}10\ \Omega$ et $I_{\max} = \dfrac{E_{\text{totem}}}{R} = 7{,}6 \times 10^3$ A.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0 - 760}{2.0 - 0} \approx -380$$

$$(-20) \times (-380) = 7\,600$$

B.2 Estimer le délai minimal à respecter entre le passage de deux bus au totem.

Données utiles $W = \frac{1}{2} \times C_{\text{totem}} \times u_C^2$; $C_{\text{totem}} = 20$ F ; $E_{\text{totem}} = 760$ V ; $P = 9{,}0$ kW

Hypothèse : le bus vide entièrement le condensateur totem, qu'il faut ensuite recharger jusqu'à E_{totem}.

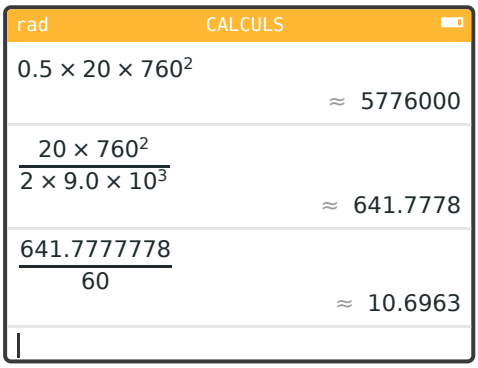
Énergie à fournir : $W = \frac{1}{2} \times C_{\text{totem}} \times E_{\text{totem}}^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 760^2 = 5{,}8 \times 10^6$ J

Le réseau fournit cette énergie à puissance constante : $W = P \times \Delta t$, donc

$$\Delta t = \frac{W}{P} = \frac{C_{\text{totem}} \times E_{\text{totem}}^2}{2\,P} = \frac{20 \times 760^2}{2 \times 9{,}0 \times 10^3} = 6{,}4 \times 10^2 \text{ s}$$

$\Delta t \approx 6{,}4 \times 10^2$ s, soit environ 11 min entre deux bus

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Laisser la puissance en kilowatts : $9{,}0\,\text{kW} = 9{,}0 \times 10^3$ W. Sinon on obtient une durée mille fois trop grande.

COMPRENDRE
C'est un délai minimal : toute perte pendant la recharge l'allonge. La décharge dure environ 10 s, la recharge 11 min : le totem accumule lentement ce qu'il restitue très vite.

Une exoplanète : 51PEG_b

Bac 2022 Amérique du Nord Jour 1 · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

A.1 Mesurer, avec le plus de précision possible, la période de révolution T de l'exoplanète 51Peg_b autour de son étoile.

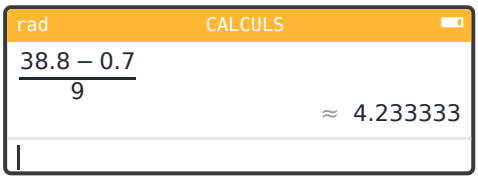
La période de révolution est celle de la courbe. Pour être précis, on mesure la durée du plus grand nombre possible de périodes.

Le graphique montre dix maximums : le premier à $t_1 \approx 0{,}7$ j, le dixième à $t_{10} \approx 38{,}8$ j. Entre les deux, il y a 9 périodes :

$$T = \frac{t_{10} - t_1}{9} = \frac{38{,}8 - 0{,}7}{9} = 4{,}2 \text{ j}$$

$T \approx 4{,}2$ jours

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Dix maximums délimitent 9 périodes, pas 10. Diviser 40 jours par 10 donnerait 4,0 j : la courbe ne commence ni ne finit sur un maximum.

COMPRENDRE
Une lecture graphique ne garantit que deux chiffres significatifs : on écrit 4,2 j. Selon le pointage, une lecture de 4,3 j est recevable ; les résultats qui en découlent auront deux chiffres.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs périodes puis diviser : l'erreur de lecture, toujours la même, est répartie sur 9 périodes au lieu d'une. On repère des points faciles à pointer (maximums ou passages par zéro).

A.2 Choisir, en argumentant (notamment par une analyse dimensionnelle), l'expression qui correspond à la troisième loi de Kepler pour la situation étudiée.

Données utiles G en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$

Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ s'exprime en $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$. On cherche l'unité du second membre de chaque expression ($4\pi^2$ est sans unité) :

- $\frac{4\pi^2}{G\,M_{51Peg_a}} : \frac{1}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{kg}} = \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$, homogène ;
- $\frac{G\,M_{51Peg_a}}{4\pi^2} : \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$, non homogène ;
- $\frac{4\pi^2}{G\,M_{Soleil}} : \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$, homogène ;
- $\frac{4\pi^2\,G}{M_{51Peg_a}} : \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-2}$, non homogène.

Deux expressions restent possibles : la première et la troisième. La planète 51Peg_b tourne autour de 51Peg_a et non autour du Soleil : la masse à utiliser est celle de l'astre attracteur, M_{51Peg_a}.

$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_{51Peg_a}}$ (première expression)

PIÈGE
S'arrêter à l'analyse dimensionnelle : elle laisse deux candidates. Il faut un second argument, physique, sur la masse de l'astre central.

COMPRENDRE
Dans la troisième loi de Kepler, la constante $\frac{T^2}{r^3}$ ne dépend que de l'astre attracteur, jamais de la masse de l'objet en orbite.

A.3 Retrouver la valeur de la distance r séparant la planète 51Peg_b de son étoile.

Données utiles $T = 4{,}2$ j (A.1) ; $G = 6{,}6742 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ s$^{-2} \cdot$ kg^{-1} ; $M_{51Peg_a} = 1{,}89 \times 10^{30}$ kg

D'après la troisième loi de Kepler (A.2) : $r^3 = \dfrac{G\,M_{51Peg_a}\,T^2}{4\pi^2}$, donc

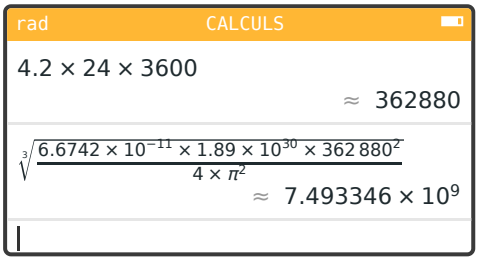
$$r = \sqrt[3]{\frac{G\,M_{51Peg_a}\,T^2}{4\pi^2}}$$

Avec $T = 4{,}2 \times 24 \times 3600 = 3{,}6 \times 10^5$ s :

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}6742 \times 10^{-11} \times 1{,}89 \times 10^{30} \times (4{,}2 \times 24 \times 3600)^2}{4\pi^2}} = 7{,}5 \times 10^9 \text{ m}$$

$r = 7{,}5 \times 10^9$ m $= 7{,}5 \times 10^6$ km, valeur annoncée par l'énoncé.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Laisser T en jours. Avec G en unités SI, T est en secondes et r sort en mètres : il reste à diviser par 1000 pour comparer aux $7{,}5 \times 10^6$ km.

COMPRENDRE
Avec une lecture $T = 4{,}3$ j en A.1, recevable, on obtient $r \approx 7{,}6 \times 10^6$ km : cette valeur reste compatible avec celle de l'énoncé, l'écart venant de la lecture graphique.

MÉTHODE
Pour une racine cubique, taper la puissance $(\ldots)^{(1\div3)}$ avec les parenthèses autour de $1 \div 3$.

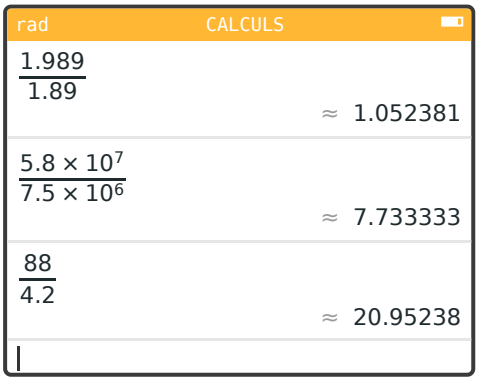
A.4 Comparer les caractéristiques du système 51Peg_b – 51Peg_a à celles du système Mercure – Soleil.

Données utiles Mercure : $r_M = 5{,}8 \times 10^7$ km, $T_M = 88$ j ; $M_{Soleil} = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg ; 51Peg_b : $r = 7{,}5 \times 10^6$ km, $T = 4{,}2$ j ; $M_{51Peg_a} = 1{,}89 \times 10^{30}$ kg

- Masses des étoiles : $\dfrac{M_{Soleil}}{M_{51Peg_a}} = \dfrac{1{,}989}{1{,}89} \approx 1{,}05$. Les deux étoiles ont pratiquement la même masse.
- Rayons des orbites : $\dfrac{r_M}{r} = \dfrac{5{,}8 \times 10^7}{7{,}5 \times 10^6} \approx 7{,}7$.
- Périodes : $\dfrac{T_M}{T} = \dfrac{88}{4{,}2} \approx 21$.

Autour d'une étoile semblable au Soleil, 51Peg_b est environ 8 fois plus proche de son étoile que Mercure du Soleil, et elle en fait le tour environ 20 fois plus vite.

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE
Les deux résultats sont cohérents avec la loi de Kepler : à masses d'étoiles voisines, T^2 est proportionnel à r^3, et $7{,}7^{3/2} \approx 21$. Plus l'orbite est petite, plus la période est courte.

B.1 Indiquer si l'on peut distinguer 51Peg_a de 51Peg_b à l'œil nu.

Données utiles $r = 7{,}5 \times 10^9$ m (A.3) ; $D_{Terre-51Peg_a} = 4{,}53 \times 10^{17}$ m ; angle minimal de séparation pour l'œil : $3{,}0 \times 10^{-4}$ rad

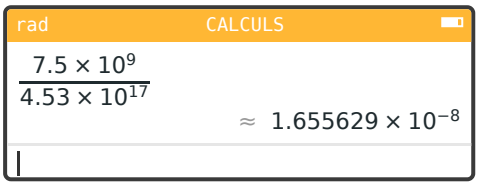
Vus de la Terre, les deux astres sont séparés de $AB = r$ et situés à la distance $D = D_{Terre-51Peg_a}$:

$$\alpha = \frac{r}{D} = \frac{7{,}5 \times 10^9}{4{,}53 \times 10^{17}} = 1{,}7 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

$\alpha = 1{,}7 \times 10^{-8}$ rad $< 3{,}0 \times 10^{-4}$ rad : l'œil nu ne peut pas distinguer la planète de son étoile.

PIÈGE
Prendre r en km et D en m. Les deux longueurs doivent être dans la même unité pour que le quotient soit un angle en radian.

À LA CALCULATRICE



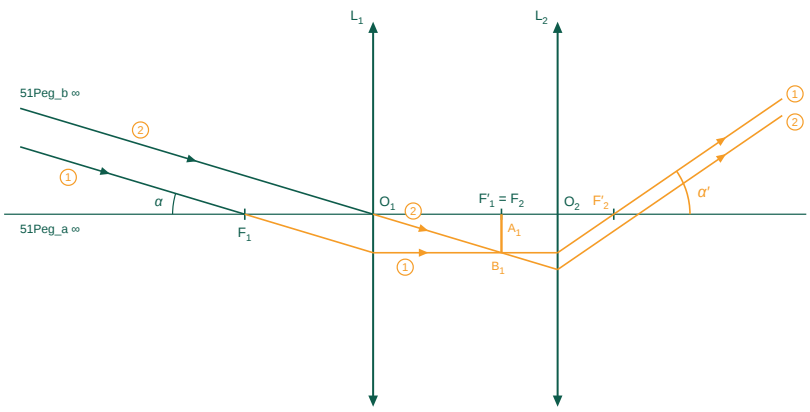
B.2 Compléter le schéma du document réponse avec le trajet de la lumière et faire apparaître l'angle α' sous lequel est vu le système double à travers la lunette.

- Rayon ①, qui passe par le foyer objet F_1 : il ressort de L_1 parallèle à l'axe optique.
- Rayon ②, qui passe par le centre optique O_1 : il n'est pas dévié.
- Les deux rayons se croisent en B_1, dans le plan focal image de l'objectif : A_1B_1 est l'image intermédiaire, avec A_1 en F'_1.
- La lunette est afocale : F'_1 et F_2 sont confondus. On place F'_2, symétrique de F_2 par rapport à O_2.
- Le rayon ①, parallèle à l'axe, ressort de L_2 en passant par F'_2. Le rayon ② ressort parallèle au rayon ①, car B_1 est dans le plan focal objet de l'oculaire.

α' est l'angle entre l'axe optique et les rayons qui sortent de l'oculaire ; on le marque en F'_2.

PIÈGE
Dévier le rayon ② à la traversée de O_1, ou faire converger les rayons après l'oculaire. À la sortie d'une lunette afocale, les rayons issus d'un même point sont parallèles.

MÉTHODE
Sur une lentille convergente, deux rayons se tracent sans calcul : celui qui passe par le centre optique (non dévié) et celui qui arrive parallèle à l'axe (il ressort par le foyer image).



B.2 · Document réponse complété : en orange, les tracés de l'élève et l'angle α'

B.3 Établir l'expression du grossissement de la lunette en fonction de la distance focale de l'objectif et de celle de l'oculaire.

Le grossissement est $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$.

Dans le triangle $O_1F_1'B_1$, rectangle en F_1' : $\tan\alpha = \dfrac{A_1B_1}{O_1F_1'} = \dfrac{A_1B_1}{f_1'}$.

Dans le triangle $O_2F_2B_1$, rectangle en F_2 (le rayon passant par B_1 et O_2 sort de l'oculaire sous l'angle α') : $\tan\alpha' = \dfrac{A_1B_1}{O_2F_2} = \dfrac{A_1B_1}{f_2'}$.

Les angles sont petits et exprimés en radian : $\tan\alpha \approx \alpha$ et $\tan\alpha' \approx \alpha'$. Donc

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{A_1B_1}{f_2'} \times \frac{f_1'}{A_1B_1}$$

$$\boxed{G = \frac{f_1'}{f_2'}}$$

PIÈGE
Donner la formule sans démonstration : « établir » demande les deux triangles, l'approximation des petits angles et la simplification par A_1B_1.

COMPRENDRE
L'image intermédiaire A_1B_1 est le côté commun aux deux triangles : c'est elle qui relie α et α', puis disparaît du résultat.

B.4 En détaillant le raisonnement, indiquer si l'on peut distinguer 51Peg_b de son étoile à l'aide du matériel disponible.

Données utiles $f_1' = 900$ mm ; f_2' : 6,0 mm, 10,0 mm ou 20,0 mm ; $\alpha = \dfrac{r}{D}$ (B.1) ; seuil de l'œil : $3{,}0 \times 10^{-4}$ rad

À travers la lunette, l'œil voit le système sous l'angle $\alpha' = G\,\alpha = \dfrac{f_1'}{f_2'}\,\alpha$.

Le grossissement est le plus grand avec l'oculaire de plus petite distance focale, $f_2' = 6{,}0$ mm :

$$G = \frac{900}{6{,}0} = 150$$

$$\alpha' = 150 \times \frac{7{,}5 \times 10^{9}}{4{,}53 \times 10^{17}} = 2{,}5 \times 10^{-6}\ \text{rad}$$

$\alpha' = 2{,}5 \times 10^{-6}$ rad $< 3{,}0 \times 10^{-4}$ rad : même avec le meilleur oculaire, cette lunette ne permet pas de distinguer 51Peg_b de son étoile.

COMPRENDRE
Il faudrait un grossissement d'environ $\dfrac{3{,}0 \times 10^{-4}}{1{,}7 \times 10^{-8}} \approx 18\,000$. C'est pourquoi la planète a été détectée indirectement, par la variation de vitesse de son étoile.

MÉTHODE
Les deux distances focales s'expriment dans la même unité (ici le mm) : le grossissement est un nombre sans unité.

À LA CALCULATRICE

