Une exoplanète : 51PEG_b

Bac 2022 Amérique du Nord Jour 1 · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

A.1 Mesurer, avec le plus de précision possible, la période de révolution T de l'exoplanète 51Peg_b autour de son étoile.

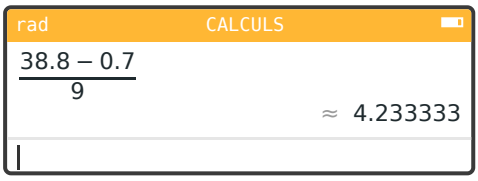
La période de révolution est celle de la courbe. Pour être précis, on mesure la durée du plus grand nombre possible de périodes.

Le graphique montre dix maximums : le premier à $t_1 \approx 0{,}7$ j, le dixième à $t_{10} \approx 38{,}8$ j. Entre les deux, il y a 9 périodes :

$$T = \frac{t_{10} - t_1}{9} = \frac{38{,}8 - 0{,}7}{9} = 4{,}2 \text{ j}$$

$T \approx 4{,}2$ jours

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Dix maximums délimitent 9 périodes, pas 10. Diviser 40 jours par 10 donnerait 4,0 j : la courbe ne commence ni ne finit sur un maximum.

COMPRENDRE
Une lecture graphique ne garantit que deux chiffres significatifs : on écrit 4,2 j. Selon le pointage, une lecture de 4,3 j est recevable ; les résultats qui en découlent auront deux chiffres.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs périodes puis diviser : l'erreur de lecture, toujours la même, est répartie sur 9 périodes au lieu d'une. On repère des points faciles à pointer (maximums ou passages par zéro).

A.2 Choisir, en argumentant (notamment par une analyse dimensionnelle), l'expression qui correspond à la troisième loi de Kepler pour la situation étudiée.

Données utiles G en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$

Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ s'exprime en $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$. On cherche l'unité du second membre de chaque expression ($4\pi^2$ est sans unité) :

- $\frac{4\pi^2}{G\,M_{51Peg_a}} : \frac{1}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{kg}} = \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$, homogène ;
- $\frac{G\,M_{51Peg_a}}{4\pi^2} : \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$, non homogène ;
- $\frac{4\pi^2}{G\,M_{Soleil}} : \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$, homogène ;
- $\frac{4\pi^2\,G}{M_{51Peg_a}} : \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-2}$, non homogène.

Deux expressions restent possibles : la première et la troisième. La planète 51Peg_b tourne autour de 51Peg_a et non autour du Soleil : la masse à utiliser est celle de l'astre attracteur, M_{51Peg_a}.

$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_{51Peg_a}}$ (première expression)

PIÈGE
S'arrêter à l'analyse dimensionnelle : elle laisse deux candidates. Il faut un second argument, physique, sur la masse de l'astre central.

COMPRENDRE
Dans la troisième loi de Kepler, la constante $\frac{T^2}{r^3}$ ne dépend que de l'astre attracteur, jamais de la masse de l'objet en orbite.

A.3 Retrouver la valeur de la distance r séparant la planète 51Peg_b de son étoile.

Données utiles $T = 4{,}2$ j (A.1) ; $G = 6{,}6742 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ s$^{-2} \cdot$ kg^{-1} ; $M_{51Peg_a} = 1{,}89 \times 10^{30}$ kg

D'après la troisième loi de Kepler (A.2) : $r^3 = \dfrac{G\,M_{51Peg_a}\,T^2}{4\pi^2}$, donc

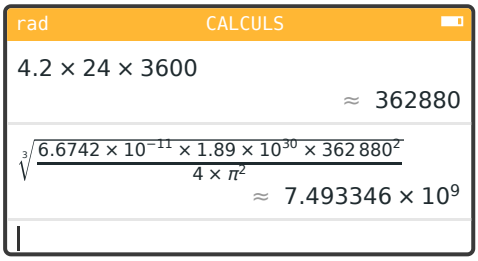
$$r = \sqrt[3]{\frac{G\,M_{51Peg_a}\,T^2}{4\pi^2}}$$

Avec $T = 4{,}2 \times 24 \times 3600 = 3{,}6 \times 10^5$ s :

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}6742 \times 10^{-11} \times 1{,}89 \times 10^{30} \times (4{,}2 \times 24 \times 3600)^2}{4\pi^2}} = 7{,}5 \times 10^9 \text{ m}$$

$r = 7{,}5 \times 10^9$ m $= 7{,}5 \times 10^6$ km, valeur annoncée par l'énoncé.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Laisser T en jours. Avec G en unités SI, T est en secondes et r sort en mètres : il reste à diviser par 1000 pour comparer aux $7{,}5 \times 10^6$ km.

COMPRENDRE
Avec une lecture $T = 4{,}3$ j en A.1, recevable, on obtient $r \approx 7{,}6 \times 10^6$ km : cette valeur reste compatible avec celle de l'énoncé, l'écart venant de la lecture graphique.

MÉTHODE
Pour une racine cubique, taper la puissance $(\ldots)^{(1\div3)}$ avec les parenthèses autour de $1 \div 3$.

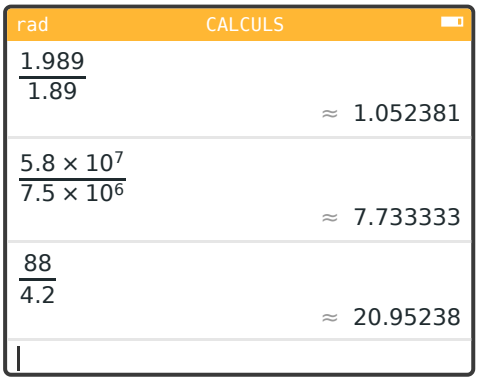
A.4 Comparer les caractéristiques du système 51Peg_b – 51Peg_a à celles du système Mercure – Soleil.

Données utiles Mercure : $r_M = 5{,}8 \times 10^7$ km, $T_M = 88$ j ; $M_{Soleil} = 1{,}989 \times 10^{30}$ kg ; 51Peg_b : $r = 7{,}5 \times 10^6$ km, $T = 4{,}2$ j ; $M_{51Peg_a} = 1{,}89 \times 10^{30}$ kg

- Masses des étoiles : $\dfrac{M_{Soleil}}{M_{51Peg_a}} = \dfrac{1{,}989}{1{,}89} \approx 1{,}05$. Les deux étoiles ont pratiquement la même masse.
- Rayons des orbites : $\dfrac{r_M}{r} = \dfrac{5{,}8 \times 10^7}{7{,}5 \times 10^6} \approx 7{,}7$.
- Périodes : $\dfrac{T_M}{T} = \dfrac{88}{4{,}2} \approx 21$.

Autour d'une étoile semblable au Soleil, 51Peg_b est environ 8 fois plus proche de son étoile que Mercure du Soleil, et elle en fait le tour environ 20 fois plus vite.

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE
Les deux résultats sont cohérents avec la loi de Kepler : à masses d'étoiles voisines, T^2 est proportionnel à r^3, et $7{,}7^{3/2} \approx 21$. Plus l'orbite est petite, plus la période est courte.

B.1 Indiquer si l'on peut distinguer 51Peg_a de 51Peg_b à l'œil nu.

Données utiles $r = 7{,}5 \times 10^9$ m (A.3) ; $D_{Terre-51Peg_a} = 4{,}53 \times 10^{17}$ m ; angle minimal de séparation pour l'œil : $3{,}0 \times 10^{-4}$ rad

Vus de la Terre, les deux astres sont séparés de $AB = r$ et situés à la distance $D = D_{Terre-51Peg_a}$:

$$\alpha = \frac{r}{D} = \frac{7{,}5 \times 10^9}{4{,}53 \times 10^{17}} = 1{,}7 \times 10^{-8} \text{ rad}$$

$\alpha = 1{,}7 \times 10^{-8}$ rad $< 3{,}0 \times 10^{-4}$ rad : l'œil nu ne peut pas distinguer la planète de son étoile.

PIÈGE
Prendre r en km et D en m. Les deux longueurs doivent être dans la même unité pour que le quotient soit un angle en radian.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{7.5 \times 10^9}{4.53 \times 10^{17}} \approx 1.655629 \times 10^{-8}$$

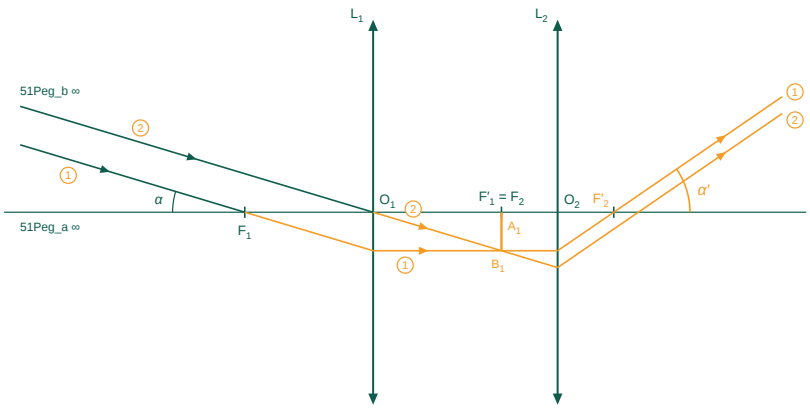
B.2 Compléter le schéma du document réponse avec le trajet de la lumière et faire apparaître l'angle α' sous lequel est vu le système double à travers la lunette.

- Rayon ①, qui passe par le foyer objet F_1 : il ressort de L_1 parallèle à l'axe optique.
- Rayon ②, qui passe par le centre optique O_1 : il n'est pas dévié.
- Les deux rayons se croisent en B_1, dans le plan focal image de l'objectif : A_1B_1 est l'image intermédiaire, avec A_1 en F'_1.
- La lunette est afocale : F'_1 et F_2 sont confondus. On place F'_2, symétrique de F_2 par rapport à O_2.
- Le rayon ①, parallèle à l'axe, ressort de L_2 en passant par F'_2. Le rayon ② ressort parallèle au rayon ①, car B_1 est dans le plan focal objet de l'oculaire.

α' est l'angle entre l'axe optique et les rayons qui sortent de l'oculaire ; on le marque en F'_2.

PIÈGE
Dévier le rayon ② à la traversée de O_1, ou faire converger les rayons après l'oculaire. À la sortie d'une lunette afocale, les rayons issus d'un même point sont parallèles.

MÉTHODE
Sur une lentille convergente, deux rayons se tracent sans calcul : celui qui passe par le centre optique (non dévié) et celui qui arrive parallèle à l'axe (il ressort par le foyer image).



B.2 · Document réponse complété : en orange, les tracés de l'élève et l'angle α'

B.3 Établir l'expression du grossissement de la lunette en fonction de la distance focale de l'objectif et de celle de l'oculaire.

Le grossissement est $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$.

Dans le triangle $O_1F_1'B_1$, rectangle en F_1' : $\tan\alpha = \dfrac{A_1B_1}{O_1F_1'} = \dfrac{A_1B_1}{f_1'}$.

Dans le triangle $O_2F_2B_1$, rectangle en F_2 (le rayon passant par B_1 et O_2 sort de l'oculaire sous l'angle α') : $\tan\alpha' = \dfrac{A_1B_1}{O_2F_2} = \dfrac{A_1B_1}{f_2'}$.

Les angles sont petits et exprimés en radian : $\tan\alpha \approx \alpha$ et $\tan\alpha' \approx \alpha'$. Donc

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{A_1B_1}{f_2'} \times \frac{f_1'}{A_1B_1}$$

$$\boxed{G = \frac{f_1'}{f_2'}}$$

PIÈGE
Donner la formule sans démonstration : « établir » demande les deux triangles, l'approximation des petits angles et la simplification par A_1B_1.

COMPRENDRE
L'image intermédiaire A_1B_1 est le côté commun aux deux triangles : c'est elle qui relie α et α', puis disparaît du résultat.

B.4 En détaillant le raisonnement, indiquer si l'on peut distinguer 51Peg_b de son étoile à l'aide du matériel disponible.

Données utiles $f_1' = 900$ mm ; f_2' : 6,0 mm, 10,0 mm ou 20,0 mm ; $\alpha = \dfrac{r}{D}$ (B.1) ; seuil de l'œil : $3{,}0 \times 10^{-4}$ rad

À travers la lunette, l'œil voit le système sous l'angle $\alpha' = G\,\alpha = \dfrac{f_1'}{f_2'}\,\alpha$.

Le grossissement est le plus grand avec l'oculaire de plus petite distance focale, $f_2' = 6{,}0$ mm :

$$G = \frac{900}{6{,}0} = 150$$

$$\alpha' = 150 \times \frac{7{,}5 \times 10^{9}}{4{,}53 \times 10^{17}} = 2{,}5 \times 10^{-6}\ \text{rad}$$

$\alpha' = 2{,}5 \times 10^{-6}$ rad $< 3{,}0 \times 10^{-4}$ rad : même avec le meilleur oculaire, cette lunette ne permet pas de distinguer 51Peg_b de son étoile.

COMPRENDRE
Il faudrait un grossissement d'environ $\dfrac{3{,}0 \times 10^{-4}}{1{,}7 \times 10^{-8}} \approx 18\,000$. C'est pourquoi la planète a été détectée indirectement, par la variation de vitesse de son étoile.

MÉTHODE
Les deux distances focales s'expriment dans la même unité (ici le mm) : le grossissement est un nombre sans unité.

À LA CALCULATRICE

