Des supercondensateurs pour recharger un bus électrique

Bac 2022 Amérique du Nord Jour 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

A.1 Montrer qu'au cours de la décharge l'intensité s'écrit $i(t) = -C \times \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$.

Sur le schéma, la flèche de i sort de l'armature positive, qui porte la charge $q(t)$: le courant emporte cette charge, donc

$$i(t) = -\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

Pour un condensateur, $q(t) = C \times u_C(t)$, avec C constante.

$$\boxed{i(t) = -\frac{\mathrm{d}\left(C\,u_C(t)\right)}{\mathrm{d}t} = -C \times \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}}$$

PIÈGE

Écrire par habitude $i = +\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Cette relation suppose que i arrive sur l'armature qui porte q. Ici i en repart : il faut le signe « $-$ » et le justifier avec le schéma.

COMPRENDRE

Pendant la décharge, u_C diminue : sa dérivée est négative et i est donc positive. Le courant circule réellement dans le sens de la flèche.

A.2 En déduire que la tension $u_C(t)$ obéit à l'équation différentielle $RC \times \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0$.

Interrupteur fermé, la loi des mailles donne, avec les flèches du schéma : $u_C(t) = u_R(t)$.

Loi d'Ohm pour le conducteur ohmique : $u_R(t) = R \times i(t)$.

Avec l'expression de $i(t)$ (A.1) : $u_C(t) = -RC \times \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$, soit

$$\boxed{RC \times \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0}$$

MÉTHODE

Toujours les trois mêmes étapes : loi des mailles, loi d'Ohm, relation entre i et u_C. On remplace ensuite pour ne garder que u_C et sa dérivée.

A.3 La solution est de la forme $u_C(t) = A + B \times \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$. Déterminer, en détaillant la démarche, les valeurs de A et B.

Données utiles $u_C(0) = E = 2{,}7$ V

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{B}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$RC \times \left(-\frac{B}{RC}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) + A + B\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = 0 \quad \text{soit} \quad A = 0$$

Condition initiale : $u_C(0) = A + B \times \mathrm{e}^0 = B$, or $u_C(0) = E$, donc $B = E$.

$\boxed{A = 0 \text{ V et } B = E = 2{,}7 \text{ V, d'où } u_C(t) = E\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}}$

COMPRENDRE

A est la tension au bout d'un temps très long : le condensateur est alors déchargé, donc $A = 0$. Ce raisonnement physique est accepté à la place du report dans l'équation.

A.4 Déterminer le temps caractéristique τ de la décharge, en faisant apparaître la construction graphique sur le document réponse.

Données utiles $E = 2{,}7$ V ; courbe $u_C(t)$ du document réponse

Avec $\tau = RC$: $u_C(\tau) = E\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37 \times E$.

$u_C(\tau) = 0{,}37 \times 2{,}7 = 1{,}0$ V

On trace l'horizontale d'ordonnée $1{,}0$ V jusqu'à la courbe, puis on descend à la verticale jusqu'à l'axe des temps.

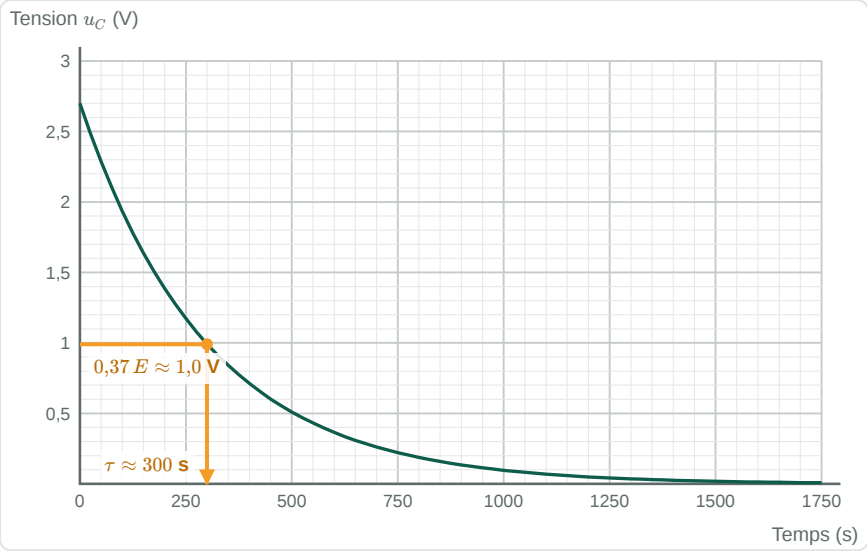
$\boxed{\tau \approx 3{,}0 \times 10^2 \text{ s}}$

PIÈGE

Lire le temps pour lequel u_C vaut 37 % de l'échelle (ou 63 % de E, valeur réservée à la charge). Une graduation vaut 50 s sur l'axe des temps.

MÉTHODE

Autre construction possible : la tangente à l'origine coupe l'axe des temps en $t = \tau$. Elle est moins précise, car le tracé de la tangente est délicat.



À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

0.37×2.7

≈ 0.999

A.4 · Document réponse complété : lecture de τ à 37 % de la tension initiale

A.5 En déduire la valeur de la capacité du supercondensateur. Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

Données utiles $\tau = 3{,}0 \times 10^2$ s (A.4) ; $R = 100\ \text{m}\Omega$

$\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$

$$C = \frac{3{,}0 \times 10^2}{100 \times 10^{-3}} = 3{,}0 \times 10^3 \text{ F}$$

Les condensateurs usuels du laboratoire ont des capacités allant du nanofarad au millifarad : celle-ci est au moins un million de fois plus grande, ce qui justifie le nom de supercondensateur.

$C = 3{,}0 \times 10^3$ F

PIÈGE
Oublier de convertir R : $100\ \text{m}\Omega = 0{,}100\ \Omega$. Sans conversion, on trouve 3 F, mille fois trop petit.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs : τ est lu sur un graphique et n'est connu qu'à quelques dizaines de secondes près.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{3.0 \times 10^2}{100 \times 10^{-3}}$

≈ 3000

A.6 Calculer $u(C)$ et écrire le résultat de la mesure avec son incertitude-type. Comparer à la valeur de référence du constructeur $C_{\text{réf}} = 3000$ F.

Données utiles $C = 3{,}0 \times 10^3$ F (A.5) ; $\tau = 3{,}0 \times 10^2$ s (A.4) ; $u(\tau) = 25$ s ; $R = 100\ \text{m}\Omega$; $u(R) = 2\ \text{m}\Omega$

$$u(C) = 3{,}0 \times 10^3 \times \sqrt{\left(\frac{25}{3{,}0 \times 10^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{100}\right)^2} = 2{,}6 \times 10^2 \text{ F}$$

On garde un seul chiffre significatif, arrondi par excès : $u(C) = 3 \times 10^2$ F.

Comparaison : $\dfrac{|C - C_{\text{réf}}|}{u(C)} = \dfrac{|3{,}0 \times 10^3 - 3000|}{3 \times 10^2} = 0$, valeur inférieure à 2. La mesure est compatible avec la valeur du constructeur.

$C = (3{,}0 \pm 0{,}3) \times 10^3$ F, en accord avec $C_{\text{réf}} = 3000$ F

PIÈGE
Écrire $C = 3000 \pm 257$ F. Le dernier chiffre de la valeur doit avoir le même rang que celui de l'incertitude : ici la centaine de farads.

COMPRENDRE
Une lecture $\tau = 290$ s donnerait $C = 2{,}9 \times 10^3$ F et un écart de 0,3 incertitude-type : la conclusion est la même. L'écart reste très inférieur à $2\,u(C)$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$3.0 \times 10^3 \times \sqrt{\left(\frac{25}{3.0 \times 10^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{100}\right)^2} \approx 257.0992$$

B.1 Déterminer la valeur de l'intensité maximale $I_{\max}$ lors de la phase de décharge. Commenter.

Données utiles $C_{\text{totem}} = 20$ F ; $E_{\text{totem}} = 760$ V ; courbe $u_C(t)$ du condensateur totem

D'après A.1, $i(t) = -C_{\text{totem}} \times \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: l'intensité est maximale quand la courbe descend le plus vite, c'est-à-dire à $t = 0$.

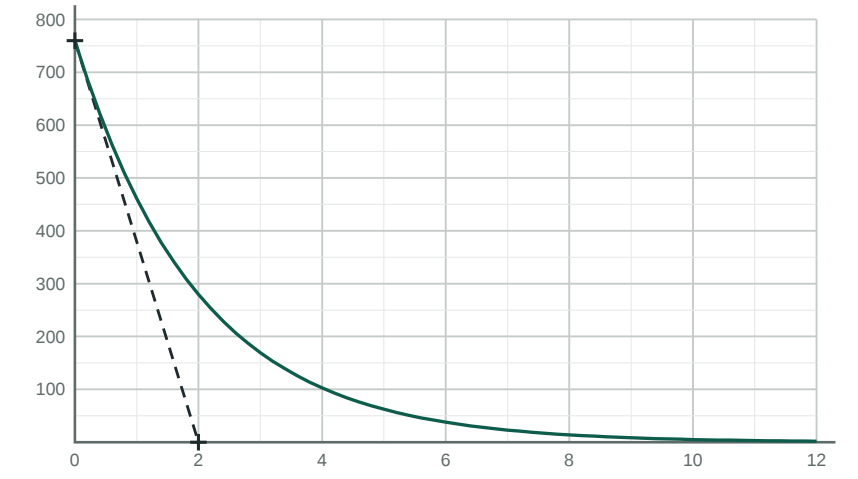
La dérivée en $t = 0$ est le coefficient directeur de la tangente à l'origine. Cette tangente passe par les points $(0\ \text{s}; 760\ \text{V})$ et $(2{,}0\ \text{s}; 0\ \text{V})$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \frac{0 - 760}{2{,}0 - 0} = -3{,}8 \times 10^2\ \text{V} \cdot \text{s}^{-1}$$

$I_{\max} = -20 \times (-3{,}8 \times 10^2) = 7{,}6 \times 10^3$ A

Ce résultat confirme l'énoncé, qui annonce plusieurs milliers d'ampères en début de transfert. Une telle intensité impose une connexion parfaitement sécurisée.

$$I_{\max} = 7{,}6 \times 10^3\ \text{A}$$



B.1 · Tangente à l'origine : elle coupe l'axe des temps à $t = 2{,}0$ s

PIÈGE

Reprendre $R = 100\ \text{m}\Omega$ de la partie A sans justification : la résistance de cette décharge n'est pas donnée, il faut exploiter la courbe.

MÉTHODE

Vérification : la tangente à l'origine coupe l'axe en $\tau = 2{,}0$ s, donc $R = \dfrac{\tau}{C_{\text{totem}}} = 0{,}10\ \Omega$ et $I_{\max} = \dfrac{E_{\text{totem}}}{R} = 7{,}6 \times 10^3$ A.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0 - 760}{2.0 - 0} \approx -380$$

$$(-20) \times (-380) = 7\,600$$

B.2 Estimer le délai minimal à respecter entre le passage de deux bus au totem.

Données utiles $W = \frac{1}{2} \times C_{\text{totem}} \times u_C^2$; $C_{\text{totem}} = 20$ F ; $E_{\text{totem}} = 760$ V ; $P = 9{,}0$ kW

Hypothèse : le bus vide entièrement le condensateur totem, qu'il faut ensuite recharger jusqu'à E_{totem}.

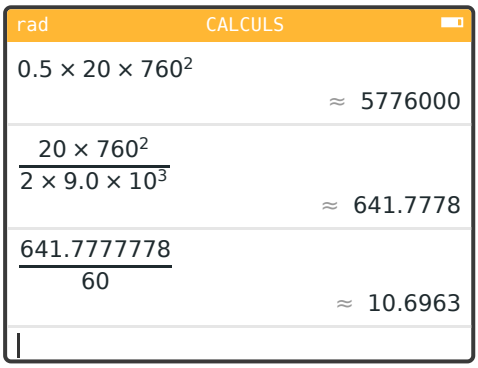
Énergie à fournir : $W = \frac{1}{2} \times C_{\text{totem}} \times E_{\text{totem}}^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 760^2 = 5{,}8 \times 10^6$ J

Le réseau fournit cette énergie à puissance constante : $W = P \times \Delta t$, donc

$$\Delta t = \frac{W}{P} = \frac{C_{\text{totem}} \times E_{\text{totem}}^2}{2\,P} = \frac{20 \times 760^2}{2 \times 9{,}0 \times 10^3} = 6{,}4 \times 10^2 \text{ s}$$

$\Delta t \approx 6{,}4 \times 10^2$ s, soit environ 11 min entre deux bus

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Laisser la puissance en kilowatts : $9{,}0$ kW $= 9{,}0 \times 10^3$ W. Sinon on obtient une durée mille fois trop grande.

COMPRENDRE
C'est un délai minimal : toute perte pendant la recharge l'allonge. La décharge dure environ 10 s, la recharge 11 min : le totem accumule lentement ce qu'il restitue très vite.