L'épaisseur du matelas du saut à la perche

Bac 2022 Amérique du Nord Jour 1 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

A.1 Identifier, parmi les courbes A et B, celle de l'énergie cinétique et celle de l'énergie potentielle de pesanteur. Justifier.

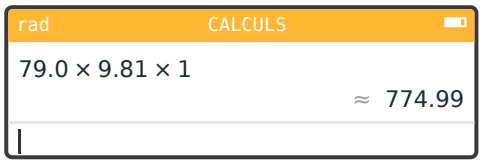
Pendant l'ascension, l'altitude z de l'athlète ne cesse d'augmenter, donc $E_{pp} = m\,g\,z$ augmente sans cesse : seule la courbe B est toujours croissante.

Au départ, l'athlète arrive de sa course d'élan avec sa vitesse la plus grande, puis il ralentit : $E_c = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2$ est maximale au début et quasi nulle au sommet, comme la courbe A.

Courbe A : énergie cinétique E_c. Courbe B : énergie potentielle de pesanteur E_{pp}.

MÉTHODE
On peut confirmer avec le programme : à $t = 0$, $z = 1$ m donne $E_{pp} = 79{,}0 \times 9{,}81 \times 1 \approx 775$ J, ordonnée du premier point de la courbe B.

À LA CALCULATRICE



A.2 Recopier et compléter les lignes 27 et 28 du programme.

Ligne 27 : `Ec[i]=0.5*m*v[i]**2`

Ligne 28 : `Epp[i]=m*g*z[i]`

`Ec[i]=0.5*m*v[i]**2` et `Epp[i]=m*g*z[i]`

PIÈGE
Oublier l'indice `[i]` : `v` et `z` sont des tableaux, le calcul se fait valeur par valeur dans la boucle. Le carré s'écrit `**2` en Python, pas `^2` .

A.3 Extraire du programme la valeur de la vitesse initiale d'Armand Duplantis.

La vitesse initiale est la première valeur du tableau `v` (ligne 16), associée à $t = 0$ s, première valeur du tableau `t` (ligne 14).

$v_0 = 10{,}063\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

COMPRENDRE
En Python, cette valeur est `v[0]` : les indices d'un tableau commencent à 0.

A.4 Identifier, parmi les trois situations proposées, celle qui correspond à $t = 0{,}9$ s. Justifier.

Sur le graphique, la courbe $E_{pe}(t)$ passe par son maximum (environ 2 700 J) à $t = 0{,}9$ s.

Or l'énergie potentielle élastique augmente avec la déformation de la perche : à cet instant, la perche est la plus pliée.

C'est la situation 2, celle où la perche est la plus courbée.

COMPRENDRE
Situation 1 : la perche commence à se plier (E_{pe} croît). Situation 3 : la perche est presque redressée, elle a restitué son énergie (E_{pe} proche de zéro, fin du mouvement).

A.5 En exploitant le graphique, déterminer l'altitude maximale z_A atteinte par le centre de masse de l'athlète.

Données utiles $m = 79{,}0$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$

L'altitude est maximale quand E_{pp} (courbe B) est maximale : au dernier point, à $t = 2{,}0$ s, on lit $E_{pp,A} \approx 4{,}7 \times 10^3$ J.

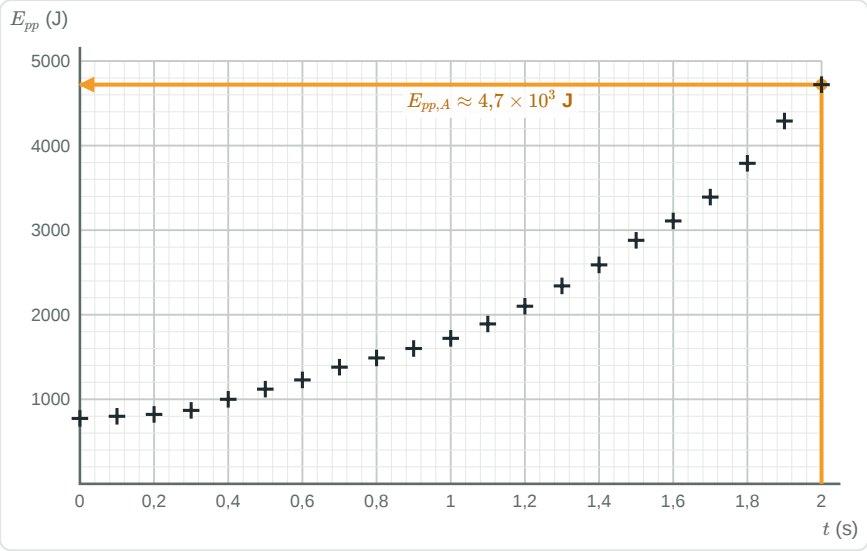
Comme $E_{pp,A} = m\,g\,z_A$:

$$z_A = \frac{E_{pp,A}}{m\,g} = \frac{4{,}7 \times 10^3}{79{,}0 \times 9{,}81} = 6{,}1\ \text{m}$$

$z_A \approx 6{,}1$ m

PIÈGE
Lire le maximum sur la mauvaise courbe, ou utiliser $E_m = 4\,775$ J : au sommet, il reste un peu d'énergie cinétique.

COMPRENDRE
La lecture graphique ne donne que deux chiffres significatifs : le résultat aussi. Il est cohérent avec la barre à 6,18 m, le centre de masse passant légèrement au-dessous.



A.5 · Courbe B du sujet (valeurs relevées), avec la lecture du maximum

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{4.7 \times 10^3}{79.0 \times 9.81} \approx 6.064594$$

B.1 Justifier qu'après le franchissement de la barre, l'athlète est en chute libre.

Après la barre, l'athlète a lâché la perche et l'action de l'air est négligée : la seule force qui s'exerce sur lui est son poids $\vec{P}$.

Un système soumis uniquement à son poids est en chute libre.

PIÈGE
« Chute libre » ne veut pas dire « chute sans vitesse initiale » ni « chute verticale » : la définition porte uniquement sur les forces.

B.2 À l'aide du théorème de l'énergie cinétique ou de la conservation de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse d'impact de l'athlète sur le tapis en fonction de g, z_A et z_B.

Système {athlète}, référentiel terrestre supposé galiléen. En chute libre, seul le poids, force conservative, travaille : l'énergie mécanique se conserve entre A (sommet, $v_A = 0$) et B (impact).

$$E_m(B) = E_m(A) \iff \frac{1}{2} m v_B^2 + m g z_B = 0 + m g z_A$$

D'où $\frac{1}{2} m v_B^2 = m g (z_A - z_B)$, soit $v_B^2 = 2 g (z_A - z_B)$.

$$v_B = \sqrt{2 g (z_A - z_B)}$$

COMPRENDRE
La masse se simplifie : la vitesse d'impact ne dépend que de la hauteur de chute.

MÉTHODE
Avec le théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{AB}(\vec{P}) = m g (z_A - z_B)$. Même résultat, une seule méthode suffit.

B.3 Calculer la valeur de la vitesse d'impact de l'athlète.

Données utiles $z_A - z_B = 5{,}31$ m ; $g = 9{,}81$ N · kg^{-1} ; expression de v_B (B.2)

$$v_B = \sqrt{2 g (z_A - z_B)} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 5{,}31}$$

$$v_B = 10{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

COMPRENDRE
Environ $37 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. On retrouve la valeur absolue de $v_{0z} = -10{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donnée dans la partie C.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\sqrt{2 \times 9.81 \times 5.31} \approx 10.20697$$

$$10.2 \times 3.6 \approx 36.72$$

C.1 Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'athlète lors de la réception puis, avec la seconde loi de Newton, démontrer que $F_T = 8{,}52$ kN.

Données utiles $m = 79{,}0$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $a_z = 10 \times g$

Système {athlète}, référentiel terrestre supposé galiléen. Forces : le poids $\vec{P}$, vertical vers le bas, de valeur $m\,g$; l'action du tapis $\vec{F_T}$, verticale vers le haut.

Seconde loi de Newton : $\vec{P} + \vec{F_T} = m\,\vec{a}$.

En projetant sur l'axe (Oz), orienté vers le haut : $-m\,g + F_T = m\,a_z$.

$$F_T = m\,(a_z + g) = m\,(10\,g + g) = 11\,m\,g$$

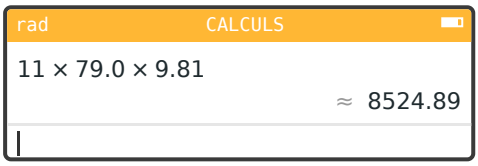
$$F_T = 11 \times 79{,}0 \times 9{,}81 = 8{,}52 \times 10^3\ \text{N}$$

$F_T = 8{,}52 \times 10^3\ \text{N} = 8{,}52\ \text{kN}$, valeur attendue.

PIÈGE
Écrire $F_T = m\,a_z = 10\,m\,g$ en oubliant le poids : on trouve 7,75 kN. Le tapis doit compenser le poids et, en plus, freiner l'athlète.

COMPRENDRE
L'athlète descend mais ralentit : son accélération est vers le haut, d'où $a_z > 0$ alors que $v_z < 0$.

À LA CALCULATRICE



C.2 En prenant l'instant du contact avec le tapis comme origine des temps, montrer que $v_z(t) = 10\,g\,t + v_{0z}$ et $z(t) = 5\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + z_B$.

Les forces sont constantes, donc l'accélération l'est aussi : $a_z = 10\,g$.

Comme $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$, on cherche une primitive : $v_z(t) = 10\,g\,t + C_1$.

À $t = 0$, $v_z(0) = v_{0z}$, donc $C_1 = v_{0z}$: $\quad v_z(t) = 10\,g\,t + v_{0z}$.

Comme $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, on cherche une primitive : $z(t) = \dfrac{1}{2} \times 10\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + C_2$.

À $t = 0$, le centre de masse est à l'altitude z_B, donc $C_2 = z_B$.

$v_z(t) = 10\,g\,t + v_{0z}$ et $z(t) = 5\,g\,t^2 + v_{0z}\,t + z_B$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration ou ne pas les justifier par les conditions initiales : c'est ce que la question évalue.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : accélération, primitive, constante fixée par la condition initiale ; puis on recommence pour passer de la vitesse à la position.

C.3 Déterminer la durée de la phase de réception.

Données utiles $v_{0z} = -10{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $v_z(t)$ (C.2)

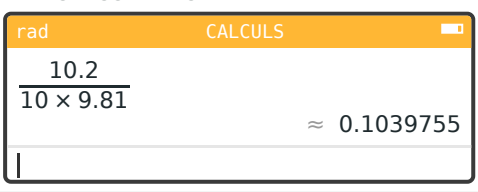
La réception se termine à l'instant t_f où l'athlète est arrêté : $v_z(t_f) = 0$.

$$10\,g\,t_f + v_{0z} = 0 \iff t_f = \frac{-v_{0z}}{10\,g} = \frac{10{,}2}{10 \times 9{,}81}$$

$t_f = 0{,}104\ \text{s}$

PIÈGE
Perdre le signe de v_{0z} et trouver une durée négative. Ne pas chercher $z(t) = 0$: la réception s'achève quand la vitesse s'annule, pas quand l'athlète touche le sol.

À LA CALCULATRICE



C.4 Le tapis a une épaisseur de 82 cm. Montrer que cette épaisseur est suffisante pour que l'athlète ne soit pas blessé par le sol.

Données utiles $t_f = 0{,}104$ s (C.3) ; $v_{0z} = -10{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $z(t)$ (C.2) ; épaisseur du tapis : 0,82 m

Pendant la réception, l'altitude du centre de masse varie de $z(t_f) - z_B = 5\,g\,t_f^2 + v_{0z}\,t_f$.

$$z(t_f) - z_B = 5 \times 9{,}81 \times 0{,}104^2 - 10{,}2 \times 0{,}104 = -0{,}53\ \text{m}$$

L'athlète s'enfonce donc de 53 cm dans le tapis avant de s'arrêter. Au contact, il est au niveau du dessus du tapis ($z_B = 0{,}82$ m) : $z(t_f) = 0{,}82 - 0{,}53 = 0{,}29$ m.

Enfoncement de $0{,}53\ \text{m} < 0{,}82\ \text{m}$: l'athlète s'arrête 29 cm au-dessus du sol, l'épaisseur est suffisante.

COMPRENDRE

C'est le cas le plus favorable : avec une accélération plus faible que $10\,g$, l'athlète s'enfonce davantage. Une accélération de $6{,}5\,g$ environ suffirait à lui faire atteindre le sol.

À LA CALCULATRICE

