Une table de tennis de table connectée

Bac 2022 Centres étrangers 2 Jour 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

1 Justifier que, pour $|v_y| < 4{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, la tension U est proportionnelle à $|v_y|$. En déduire la relation entre $|v_y|$ (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et U (en V) dans ce domaine.

Données utiles graphique $U = f(|v_y|)$: point $(4{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\ ;\ 3{,}5\ \text{V})$

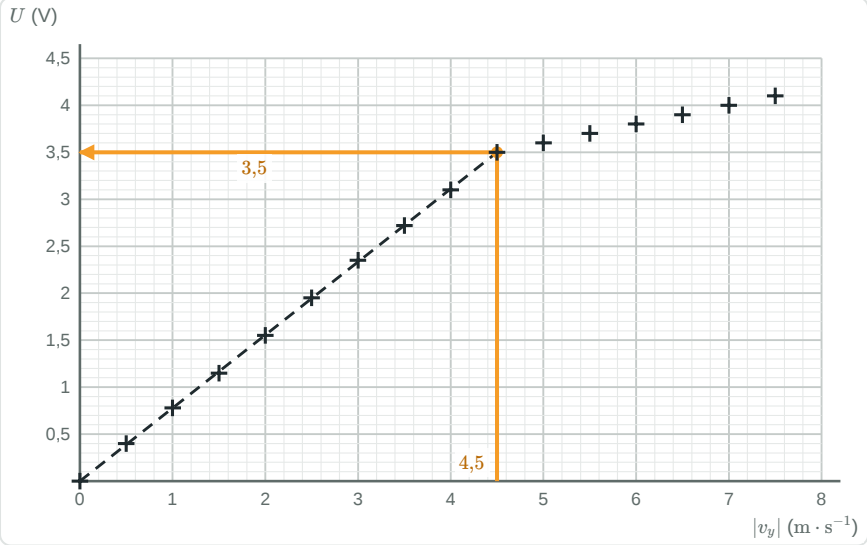
Jusqu'à $|v_y| = 4{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, les points de mesure sont alignés sur une droite qui passe par l'origine : U est donc proportionnelle à $|v_y|$, soit $U = k\,|v_y|$.

Coefficient directeur, avec le point $(4{,}5\ ;\ 3{,}5)$ de la droite :

$$k = \frac{U}{|v_y|} = \frac{3{,}5}{4{,}5} = 0{,}78\ \text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$$

Donc $U = 0{,}78\,|v_y|$, ou encore $|v_y| = \dfrac{4{,}5}{3{,}5}\,U$.

$|v_y| = 1{,}3\,U$ (avec $|v_y|$ en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et U en V)



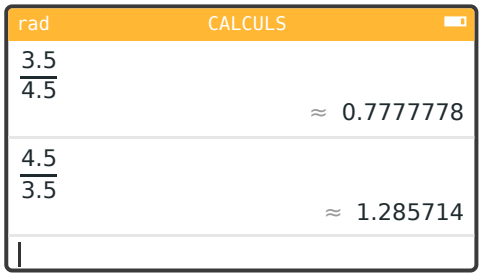
1 · Graphique du sujet : la droite passant par l'origine modélise les mesures jusqu'à 4,5 m/s

PIÈGE
Dire seulement « c'est une droite » ne suffit pas : une droite qui ne passe pas par l'origine traduit une relation affine, pas une proportionnalité. Il faut les deux arguments.

COMPRENDRE
Les lectures graphiques ont deux chiffres significatifs : le coefficient en garde deux. La relation demandée donne la vitesse à partir de la tension, comme dans le programme : c'est l'inverse de k.

MÉTHODE
Pour calculer un coefficient directeur, choisir un point de la droite le plus éloigné possible de l'origine et situé sur un croisement du quadrillage : l'erreur de lecture pèse moins.

À LA CALCULATRICE



2 Expliquer la nécessité d'utiliser la variable « `Ulim = 3.5` » dans le programme.

Le graphique montre deux comportements du capteur, séparés par le point $(4{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\ ;\ 3{,}5\ \text{V})$:

- pour $U < 3{,}5$ V, la vitesse est proportionnelle à la tension : $|v_y| = 1{,}3\,U$;
- pour $U \geqslant 3{,}5$ V, les points suivent une autre droite, qui ne passe pas par l'origine : la relation devient affine, $|v_y| = 5{,}0\,U - 13$.

`Ulim` est la tension seuil (3,5 V) qui permet au programme de choisir, grâce au test `if U < Ulim`, la relation adaptée à la tension mesurée.

COMPRENDRE
Au-delà de 4,5 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, la tension n'augmente plus que de 0,1 V quand la vitesse augmente de 0,5 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: d'où le coefficient $0{,}5 \div 0{,}1 = 5{,}0$ dans la seconde relation.

3 Calculer la vitesse d'impact affichée par le programme pour $U = 4{,}0$ V. Comparer à la valeur mesurée correspondante.

Données utiles $U = 4{,}0$ V ; `Ulim = 3.5` ; graphique du sujet

$U = 4{,}0$ V n'est pas inférieure à `Ulim` : le programme exécute l'instruction placée après `else`, soit `v = 5.0*U-13` (le sujet écrit « 5,0 » ; en Python le séparateur décimal est le point).

$$v = 5{,}0 \times 4{,}0 - 13 = 7{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

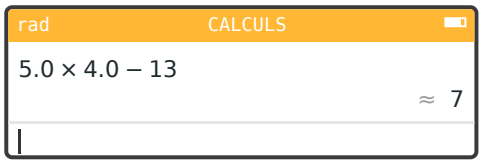
Sur le graphique, le point de mesure d'ordonnée $U = 4{,}0$ V a pour abscisse $|v_y| = 7{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

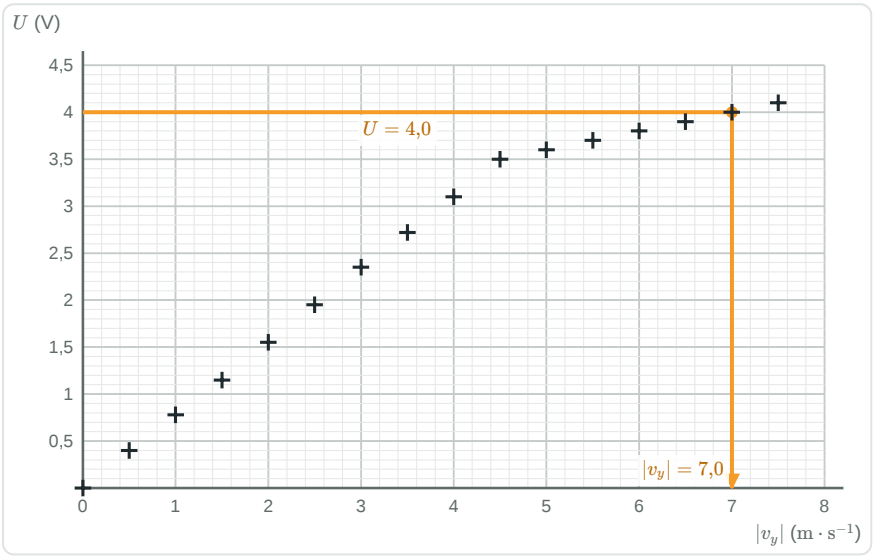
$v = 7{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: la valeur affichée est égale à la valeur mesurée, le programme est en accord avec l'expérience.

PIÈGE
Utiliser `v = 1.3*U` sans regarder le test : on trouverait 5,2 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, valeur qui ne correspond à aucune mesure pour 4,0 V.

COMPRENDRE
Erreur du sujet : écrit avec une virgule, `5,0*U-13` ne donne pas un nombre en Python mais un couple de valeurs. Les deux instructions d'affectation devraient aussi être indentées. On corrige à la lecture.

À LA CALCULATRICE





3 · Lecture de la vitesse mesurée pour U = 4,0 V

4 La balle est une sphère de diamètre $d = 40$ mm dont le centre de masse est au centre de la sphère. Justifier qualitativement cette position.

La matière de la balle forme une fine coque sphérique, d'épaisseur et de composition uniformes : sa masse est répartie de la même façon dans toutes les directions autour du centre de la sphère.

Par symétrie, le centre de masse est confondu avec le centre géométrique de la sphère.

COMPRENDRE
Le centre de masse peut se trouver là où il n'y a pas de matière : la balle est creuse. C'est la symétrie de la répartition de la masse qui fixe sa position.

5 Indiquer, dans le cadre du modèle choisi, les caractéristiques (direction, sens et valeur) de la force appliquée à la balle pendant son mouvement.

Données utiles $m = 2{,}7 \text{ g} = 2{,}7 \times 10^{-3} \text{ kg}$; $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

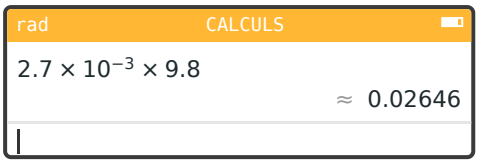
L'action de l'air étant négligée, la balle n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$:

- direction : verticale ;
- sens : vers le bas ;
- valeur : $P = m\,g = 2{,}7 \times 10^{-3} \times 9{,}8$.

$P = 2{,}6 \times 10^{-2}$ N, force verticale dirigée vers le bas.

PIÈGE
Laisser la masse en grammes : on obtiendrait 26 N, le poids d'un objet de 2,7 kg. Ne pas ajouter une « force de lancer » : après le départ, plus rien ne pousse la balle.

À LA CALCULATRICE



6 Montrer que les coordonnées du vecteur vitesse du centre de masse sont $v_x(t) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha$.

Système {balle}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, vers le bas, et l'axe Oy est orienté vers le haut :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

Conditions initiales : à $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ de coordonnées $(v_0\cos\alpha\ ;\ v_0\sin\alpha)$, donc $C_1 = v_0\cos\alpha$ et $C_2 = v_0\sin\alpha$.

$$\boxed{v_x(t) = v_0\cos\alpha \text{ et } v_y(t) = -g\,t + v_0\sin\alpha}$$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou écrire $a_y = +g$ alors que l'axe Oy est orienté vers le haut. Les constantes se déterminent à $t = 0$, pas à l'instant de l'impact.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection de $\vec{a}$ sur les axes, primitives, puis constantes fixées par les conditions initiales.

7 Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du centre de masse.

Données utiles $v_x(t)$ et $v_y(t)$ (Q6) ; à $t = 0$, la balle est en A $(0\ ;\ h)$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ (M : centre de masse), on cherche les primitives des coordonnées de la vitesse :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t + C_3 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0\sin\alpha)\,t + C_4 \end{cases}$$

Conditions initiales : à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $y(0) = h$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = h$.

$$\boxed{x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t \text{ et } y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0\sin\alpha)\,t + h}$$

PIÈGE
Écrire $C_4 = 0$: la balle ne part pas de l'origine mais du point A, à la hauteur h au-dessus de la table.

8 L'impact a lieu à l'instant $t_I \approx 0{,}55$ s. Montrer que la balle tombe sur la table.

Données utiles $v_0 = 5{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 30{,}0^\circ$; longueur de la table : 2,74 m ; $x(t)$ (Q7)

Abscisse du point d'impact : $x_I = x(t_I) = (v_0\cos\alpha)\,t_I$

$$x_I = 5{,}0 \times \cos(30{,}0^\circ) \times 0{,}55 = 2{,}4\ \text{m}$$

La table s'étend de $x = 0$ à $x = 2{,}74$ m.

$$\boxed{0 < x_I = 2{,}4\ \text{m} < 2{,}74\ \text{m} : \text{la balle tombe bien sur la table.}}$$

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\cos(30)$ donnerait 0,15 et une abscisse fausse. Vérifier le mode degrés avant le calcul.

COMPRENDRE
On peut contrôler la date proposée : $y(0{,}55) = -4{,}9 \times 0{,}55^2 + 2{,}5 \times 0{,}55 + 0{,}10 \approx 0$ m. La balle est bien au niveau de la table à cet instant.

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$5.0 \times \cos(30°) \times 0.55$
≈ 2.38157

$(-4.9) \times 0.55^2 + 2.5 \times 0.55 + 0.10$
≈ -0.00725

9 Calculer la valeur de la tension U délivrée par un capteur situé au point d'impact.

Données utiles $v_y(t)$ (Q6) ; $t_I = 0{,}55$ s ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $U = 0{,}78\,|v_y|$ pour $|v_y| < 4{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q1)

Composante verticale de la vitesse juste avant l'impact :

$$v_y(t_I) = -g\,t_I + v_0 \sin\alpha$$

$$v_y(t_I) = -9{,}8 \times 0{,}55 + 5{,}0 \times \sin(30{,}0^\circ) = -2{,}89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Donc $|v_y| = 2{,}89 \approx 2{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur inférieure à $4{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: on est dans le domaine de proportionnalité.

$$U = k\,|v_y| = \frac{3{,}5}{4{,}5} \times 2{,}89$$

$\boxed{U = 2{,}3\ \text{V}}$

PIÈGE
Utiliser la valeur de la vitesse v_0 ou la relation affine sans vérifier le domaine. Le capteur n'est sensible qu'à la composante verticale, et il faut d'abord comparer $|v_y|$ à $4{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

COMPRENDRE
v_y est négative car la balle descend ; le capteur réagit à sa valeur absolue. Avec la relation arrondie $|v_y| = 1{,}3\,U$, on trouve 2,2 V : l'écart vient de l'arrondi du coefficient, les deux valeurs sont acceptables.

À LA CALCULATRICE

deg CALCULS

$(-9.8) \times 0.55 + 5.0 \times \sin(30°)$
≈ -2.89

$\frac{3.5}{4.5} \times 2.89$
≈ 2.247778