Vitesse de la station spatiale internationale

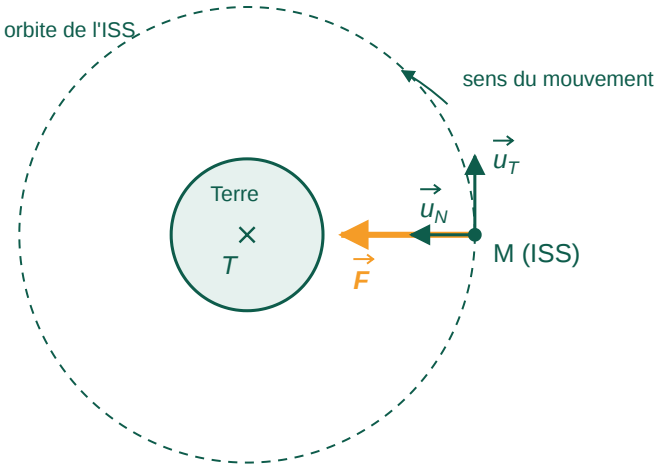
Bac 2022 Métropole Septembre Jour 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Schématiser, sans souci d'échelle, la Terre et l'ISS. Placer le repère de Frenet $(\vec{u}_N, \vec{u}_T)$ et représenter la force à laquelle est soumise l'ISS.

Le repère de Frenet a pour origine le point M : $\vec{u}_T$ est tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement ; $\vec{u}_N$ est perpendiculaire à $\vec{u}_T$ et dirigé vers le centre T de la Terre.

La force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par la Terre s'applique en M, selon la droite (MT), et pointe vers T.

PIÈGE
Le repère de Frenet est attaché à l'ISS, pas au centre de la Terre. La force part de M et ne dépasse pas le point T.



Q1 · La Terre, l'ISS, le repère de Frenet et la force gravitationnelle (en orange)

Q2 Donner, dans ce repère, l'expression vectorielle de la force à laquelle est soumise l'ISS.

La force est attractive, dirigée de M vers T, donc de même sens que $\vec{u}_N$; la distance entre les centres vaut R.

$$\vec{F} = \frac{G\,m\,M_T}{R^2}\,\vec{u}_N$$

PIÈGE
Mettre un signe « $-$ » devant $\vec{u}_N$: ce signe apparaît avec un vecteur unitaire dirigé de la Terre vers le satellite, pas avec $\vec{u}_N$ qui pointe vers T.

Q3 Déduire de la seconde loi de Newton l'expression de la vitesse de l'ISS : $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R}}$.

Système {ISS}, de masse m constante ; référentiel géocentrique supposé galiléen ; seule force : $\vec{F}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $\dfrac{G\,m\,M_T}{R^2}\,\vec{u}_N = m\,\vec{a}$, donc

$$\vec{a} = \frac{G\,M_T}{R^2}\,\vec{u}_N$$

Or, pour un mouvement circulaire de rayon R, dans le repère de Frenet : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\,\vec{u}_N + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_T$.

Par identification selon $\vec{u}_N$: $\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{G\,M_T}{R^2}$, donc $v^2 = \dfrac{G\,M_T}{R}$.

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R}}}$$

COMPRENDRE
La masse m de l'ISS se simplifie : à une altitude donnée, tous les satellites en orbite circulaire ont la même vitesse.

MÉTHODE
Orbite circulaire : 1) deuxième loi de Newton ; 2) $\vec{a}$ dans le repère de Frenet ; 3) identification.
Selon $\vec{u}_T$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: le mouvement est uniforme.
Selon $\vec{u}_N$: la vitesse.

Q4 Calculer la valeur de la vitesse v de l'ISS.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6371$ km ; $h = 419$ km

Rayon de l'orbite : $R = R_T + h = 6371 + 419 = 6790\ \text{km} = 6{,}790 \times 10^6$ m.

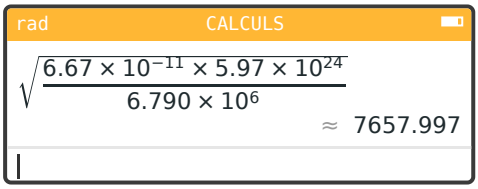
$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}{6{,}790 \times 10^6}}$$

$\boxed{v = 7{,}66 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\text{, soit } 7{,}66\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}}$

PIÈGE
Prendre $R = h$ ou $R = R_T$: R est la distance au centre de la Terre. Laisser R en kilomètres donne une vitesse fausse d'un facteur $\sqrt{1000}$.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme G, M_T et h, les données les moins précises.

À LA CALCULATRICE



Q5 En exploitant la chronophotographie (figure 2) et le schéma de la figure 1, estimer la vitesse v de l'ISS lors de l'observation. Commenter la valeur obtenue au regard de celle de Q4 et donner au moins un argument qui justifie l'écart.

Données utiles $h = 419$ km ; $d_{TS} = 153 \times 10^6$ km ; $D = 1{,}39 \times 10^6$ km ; $\Delta t = 0{,}11$ s ; $v = 7{,}66\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ (Q4)

Distance S_0S_5. Sur la figure 2 (sujet imprimé en taille réelle), le diamètre du Soleil mesure 10,9 cm et le segment S_0S_5 mesure 10,0 cm. Par proportionnalité :

$$S_0S_5 = D \times \frac{10{,}0}{10{,}9} = 1{,}39 \times 10^6 \times \frac{10{,}0}{10{,}9} = 1{,}28 \times 10^6\ \text{km}$$

Distance M_0M_5. Sur la figure 1, les droites (M_0M_5) et (S_0S_5) sont parallèles et les triangles OM_0M_5 et OS_0S_5 ont le sommet O en commun. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{M_0M_5}{S_0S_5} = \frac{h}{d_{TS}} \quad \text{donc} \quad M_0M_5 = S_0S_5 \times \frac{h}{d_{TS}}$$

$$M_0M_5 = 1{,}28 \times 10^6 \times \frac{419}{153 \times 10^6} = 3{,}5\ \text{km}$$

Vitesse. Le mouvement est supposé rectiligne uniforme et il y a 5 intervalles de temps entre M_0 et M_5 :

$$v = \frac{M_0M_5}{5\,\Delta t} = \frac{3{,}5}{5 \times 0{,}11} \approx 6{,}3\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$$

(calcul mené sans arrondi intermédiaire).

Commentaire. Cette valeur est inférieure à celle de Q4, avec un écart relatif $\dfrac{7{,}66 - 6{,}3}{7{,}66} \approx 17\ \%$: l'ordre de grandeur est correct, mais l'écart est net.

Arguments. Le Soleil n'est pas forcément à la verticale du télescope : la distance entre O et l'ISS est alors supérieure à h, et M_0M_5 est sous-estimée. De plus, la trajectoire n'est pas forcément perpendiculaire à la direction de visée, les mesures à la règle sont peu précises et le mouvement du télescope, entraîné par la rotation de la Terre, est négligé.

$v \approx 6{,}3\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, environ 17 % de moins que la valeur de Q4 ($7{,}66\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$).

PIÈGE

Six positions, mais seulement cinq intervalles : la durée vaut $5\,\Delta t = 0{,}55$ s, pas $6\,\Delta t$. Dans le rapport de Thalès, les deux distances partent de O : h et d_{TS}, sans ajouter R_T.

COMPRENDRE

Seul le rapport des deux longueurs mesurées compte : si le sujet est imprimé à une autre taille, les deux mesures changent mais leur quotient reste voisin de 0,92. Deux chiffres significatifs suffisent, comme pour Δt.

À LA CALCULATRICE

