Quelques utilisations du condensateur

Bac 2022 Centres étrangers 2 Jour 2 · Exercice 1 **10 points** **Durée conseillée 1 h 45**

1.1 Partie 1 (balance capacitive). Déterminer la valeur de la capacité C_0 du condensateur lorsque la balance est à vide, avec $\varepsilon_r = 1{,}0$. Commenter.

Données utiles $C = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\dfrac{S}{e}$; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$; $L = 4{,}0$ cm ; $\ell = 3{,}0$ cm ; $e_0 = 1$ cm

Les armatures sont des rectangles : $S = L \times \ell = 4{,}0 \times 10^{-2} \times 3{,}0 \times 10^{-2} = 1{,}2 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$.

À vide, $e = e_0 = 1 \times 10^{-2}$ m :

$$C_0 = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\frac{L\,\ell}{e_0} = 8{,}85 \times 10^{-12} \times 1{,}0 \times \frac{1{,}2 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-2}}$$

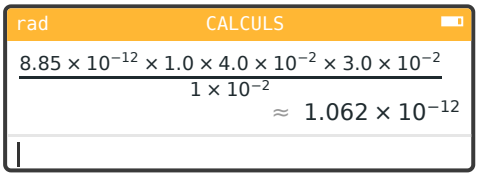
$C_0 = 1{,}1 \times 10^{-12}$ F, soit environ 1 pF.

Commentaire : cette capacité est très faible devant celles des condensateurs usuels (du nanofarad au microfarad). Le dispositif électronique de mesure doit donc être très sensible.

PIÈGE
Laisser les longueurs en centimètres. Avec ε_0 en $\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$, tout se convertit en mètres : S en m^2 et e_0 en m.

COMPRENDRE
$e_0 = 1$ cm n'a qu'un chiffre significatif : le résultat ne peut guère être plus précis que « 1 pF ». On garde deux chiffres (1,1 pF) pour ne pas trop arrondir.

À LA CALCULATRICE



1.2 Partie 1. Préciser si la capacité du condensateur augmente ou diminue lorsque l'on place une masse sur le plateau. Justifier qualitativement.

La masse posée abaisse le plateau, donc l'armature mobile : la distance e entre les armatures diminue.

Dans $C = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\dfrac{S}{e}$, les grandeurs ε_0, ε_r et S ne changent pas : C est inversement proportionnelle à e.

Quand on place une masse sur le plateau, e diminue donc la capacité C **augmente**.

1.3.1 Partie 1. L'objet de masse M étant à l'équilibre sur le plateau, vérifier que $M = \dfrac{k}{g}\,(D_0 - D)$.

Données utiles $F = k\,(D_0 - D)$

Système {objet}, référentiel terrestre supposé galiléen. Forces : le poids $\vec{P}$, vertical vers le bas, de valeur $P = M\,g$; la force $\vec{F}$ exercée par le plateau, verticale vers le haut.

L'objet est immobile : d'après le principe d'inertie, $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$. Les deux forces ont donc la même valeur :

$$M\,g = k\,(D_0 - D)$$

$M = \dfrac{k}{g}\,(D_0 - D)$

MÉTHODE
Pour un équilibre : système, référentiel, bilan des forces, principe d'inertie (somme vectorielle nulle), puis égalité des valeurs lorsque les deux forces sont opposées.

1.3.2 Partie 1. L'armature mobile se déplaçant de la même distance que le plateau, calculer la masse maximale que peut mesurer cette balance.

Données utiles $k = 980\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $g = 9{,}8\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$; $e_0 = 1$ cm ; hauteur d'une butée $h = 0{,}50$ mm

L'armature mobile descend au plus jusqu'aux butées : son déplacement maximal vaut $e_0 - h$. Le plateau descend de la même distance, donc $(D_0 - D)_{\max} = e_0 - h$.

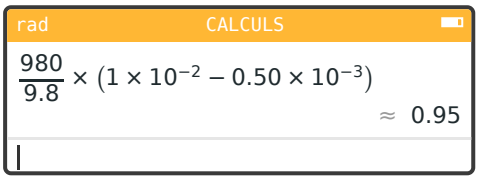
$$M_{\max} = \frac{k}{g}(e_0 - h) = \frac{980}{9{,}8} \times (1 \times 10^{-2} - 0{,}50 \times 10^{-3})$$

$M_{\max} = 0{,}95$ kg, soit environ 1 kg.

PIÈGE
Prendre e_0 comme déplacement maximal : les butées arrêtent l'armature à la distance h de l'armature fixe. Penser aussi à convertir h en mètres.

COMPRENDRE
Le graphique 2 confirme cette valeur : la courbe d'étalonnage s'arrête vers 950 g.

À LA CALCULATRICE



2.1 Partie 1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur s'écrit $RC\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E$.

Loi des mailles : $E = u_R(t) + u_C(t)$.

Loi d'Ohm : $u_R(t) = R\,i(t)$.

Pour le condensateur : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$ et $q(t) = C\,u_C(t)$ avec C constante (masse immobile), donc $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$.

En remplaçant dans la loi des mailles :

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E$$

MÉTHODE
Toujours trois étapes pour un circuit RC : loi des mailles, loi d'Ohm, relation $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. On remplace ensuite pour ne garder que u_C.

2.2 Partie 1. Déterminer l'expression de τ en fonction de R et de C pour que $u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ soit solution de l'équation différentielle.

On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$RC\frac{E}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E - E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = E$$

$$E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left(\frac{RC}{\tau} - 1\right) = 0$$

Cette égalité doit être vraie à chaque instant et l'exponentielle ne s'annule jamais : il faut $\dfrac{RC}{\tau} - 1 = 0$.

$$\tau = RC$$

PIÈGE
Oublier le facteur $-\dfrac{1}{\tau}$ en dérivant l'exponentielle, ou se tromper de signe : la dérivée de $-\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ est $+\dfrac{1}{\tau}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

2.3 Partie 1. Pour quelle courbe, 1 ou 2, du graphique 1, la valeur de la capacité du condensateur est-elle la plus élevée ? Justifier.

La courbe 2 monte plus lentement vers la valeur finale $E = 5{,}0$ V que la courbe 1 : la charge est plus lente, donc $\tau_2 > \tau_1$.

Comme $\tau = RC$ et que R est la même dans les deux cas, $C = \dfrac{\tau}{R}$ est d'autant plus grande que τ est grande.

La capacité est la plus élevée pour la **courbe 2** : $C_2 > C_1$.

COMPRENDRE
Une capacité plus grande correspond à des armatures plus proches, donc à une masse plus grande : $M_2 > M_1$.

2.4 Partie 1. En exploitant les graphiques 1 et 2, déterminer la valeur de la masse pesée M_2, en faisant apparaître la méthode sur l'annexe.

Données utiles $R = 10\ \text{M}\Omega$; $\tau = RC$ (2.2) ; valeur finale $E = 5{,}0$ V (graphique 1)

Constante de temps. À $t = \tau$, $u_C(\tau) = E\,(1 - \text{e}^{-1}) = 0{,}63\,E = 0{,}63 \times 5{,}0 = 3{,}15$ V. Sur le graphique 1, la courbe 2 atteint cette tension à $\tau_2 = 44$ µs.

Capacité. $C_2 = \dfrac{\tau_2}{R}$, donc

$$\frac{1}{C_2} = \frac{R}{\tau_2} = \frac{10 \times 10^6}{44 \times 10^{-6}} = 2{,}3 \times 10^{11}\ \text{F}^{-1}$$

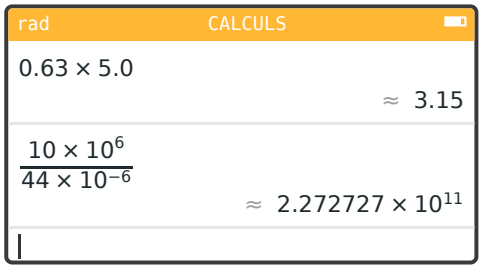
Masse. Sur le graphique 2, le point de la courbe d'étalonnage d'abscisse $2{,}3 \times 10^{11}\ \text{F}^{-1}$ a pour ordonnée environ 760 g.

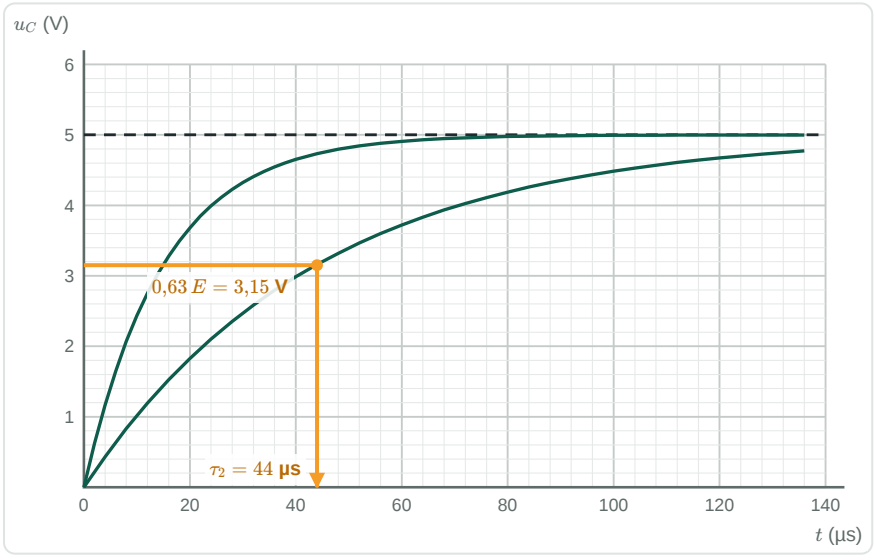
$M_2 \approx 7{,}6 \times 10^2$ g, soit 0,76 kg.

PIÈGE
Laisser R en mégaohms ou τ_2 en microsecondes : $10\ \text{M}\Omega = 10 \times 10^6\ \Omega$ et $44\ \mu\text{s} = 44 \times 10^{-6}$ s. L'axe du graphique 2 est gradué en $10^{11}\ \text{F}^{-1}$.

MÉTHODE
Autre lecture de τ : tracer la tangente à l'origine ; elle coupe l'asymptote $u_C = E$ à $t = \tau$. La méthode des 63 % est plus précise, la tangente étant délicate à tracer.

À LA CALCULATRICE





2.4 · Graphique 1 de l'annexe : lecture de τ_2 sur la courbe 2 (en haut : courbe 1 ; en bas : courbe 2)

1.1 Partie 2 (accélérateur linéaire). Préciser le signe des charges portées par les armatures A et B si on souhaite que le proton soit accéléré entre ces deux armatures. Justifier.

Le proton porte une charge positive et doit être accéléré de O vers S, c'est-à-dire de A vers B. La force électrique doit donc être dirigée de A vers B.

Une charge positive est repoussée par une armature positive et attirée par une armature négative.

L'armature A est chargée **positivement**, l'armature B **négativement**.

COMPRENDRE
C'est cohérent avec la donnée $U_{AB} = +1$ kV : A est au potentiel le plus élevé. Le champ $\vec{E}$ va de A vers B et $\vec{F_e} = q\,\vec{E}$ a le même sens puisque $q > 0$.

1.2 Partie 2. Exprimer la norme F_e de la force électrique exercée sur le proton entre les armatures, en fonction de U_{AB}, q et d .

Données utiles $E = \dfrac{|U|}{d}$

$\vec{F_e} = q\,\vec{E}$, donc en norme $F_e = |q|\,E$, avec $q > 0$ et $E = \dfrac{U_{AB}}{d}$ ($U_{AB} > 0$).

$$F_e = \frac{q\,U_{AB}}{d}$$

1.3 Partie 2. Exploiter le théorème de l'énergie cinétique pour montrer que la vitesse du proton au point S est $v_S = \sqrt{\dfrac{2\,q\,U_{AB}}{m_p}}$.

Données utiles $W_{OS}(\vec{F_e}) = q\,U_{AB}$; vitesse nulle en O

Système {proton}, référentiel du laboratoire supposé galiléen. Seule la force électrique travaille : le poids du proton est négligeable devant elle.

Théorème de l'énergie cinétique entre O et S :

$$\frac{1}{2}\,m_p\,v_S^2 - \frac{1}{2}\,m_p\,v_O^2 = W_{OS}(\vec{F_e})$$

Avec $v_O = 0$ et $W_{OS}(\vec{F_e}) = q\,U_{AB}$: $\dfrac{1}{2}\,m_p\,v_S^2 = q\,U_{AB}$, soit $v_S^2 = \dfrac{2\,q\,U_{AB}}{m_p}$.

$$v_S = \sqrt{\frac{2\,q\,U_{AB}}{m_p}}$$

COMPRENDRE
La distance d a disparu : la vitesse de sortie ne dépend que de la tension. En effet $W_{OS} = F_e \times d = \dfrac{q\,U_{AB}}{d} \times d$.

1.4 Partie 2. Calculer la valeur de v_S.

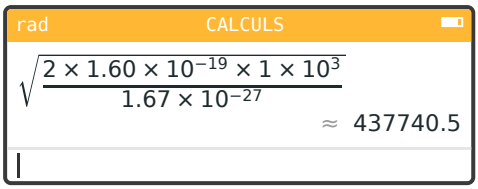
Données utiles $q = e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C ; $U_{AB} = 1$ kV ; $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

$$v_S = \sqrt{\frac{2\,q\,U_{AB}}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}60 \times 10^{-19} \times 1 \times 10^3}{1{,}67 \times 10^{-27}}} = 4{,}4 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_S \approx 4 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

COMPRENDRE
$U_{AB} = 1$ kV est donnée avec un seul chiffre significatif, d'où 4×10^5 m · s^{-1}.

À LA CALCULATRICE



2.1 Partie 2. Justifier la nécessité de changer le signe de la tension entre les blocs B et C lors du passage de la particule de la première cavité à la deuxième.

Pendant que le proton traverse la cavité 1 (entre A et B), B est négatif et C positif. Si rien ne changeait, le proton arrivant dans la cavité 2 (entre B et C) serait attiré par B et repoussé par C : il serait freiné.

Pour qu'il soit de nouveau accéléré, B doit devenir positif et C négatif à son entrée dans la cavité 2.

La tension entre B et C doit changer de signe pour que la force électrique reste dirigée dans le sens du mouvement dans la cavité 2.

2.2 Partie 2. Justifier que le proton doit parcourir la longueur d'un bloc plus la longueur d'une cavité en $2{,}5 \times 10^{-7}$ s.

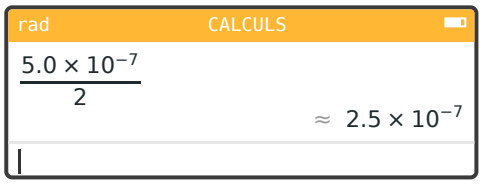
Données utiles $T = 5{,}0 \times 10^{-7}$ s

La tension $u_a(t)$ est un créneau de période T : elle change de signe toutes les demi-périodes, soit toutes les $\frac{T}{2} = \frac{5{,}0 \times 10^{-7}}{2} = 2{,}5 \times 10^{-7}$ s.

Le proton doit entrer dans chaque cavité juste au moment où la tension vient de s'inverser. Entre deux entrées successives dans une cavité, il traverse une cavité puis un bloc.

Le trajet « une cavité + un bloc » doit durer $\frac{T}{2} = 2{,}5 \times 10^{-7}$ s.

À LA CALCULATRICE



2.3 Partie 2. Expliquer qualitativement pourquoi les blocs sont de plus en plus longs dans l'accélérateur linéaire.

À chaque cavité, le proton gagne de la vitesse. Dans un bloc, son mouvement est rectiligne uniforme, à une vitesse plus grande que dans le bloc précédent.

Or la durée de parcours « une cavité + un bloc » est imposée : $\frac{T}{2}$. Les cavités ayant toutes la même longueur d, la distance parcourue dans le bloc pendant cette durée augmente avec la vitesse.

Le proton allant de plus en plus vite pour une durée de parcours fixée, les blocs doivent être de plus en plus longs.

2.4 Partie 2. Déterminer le nombre de cavités accélératrices nécessaires pour qu'un proton atteigne une énergie égale à 8,0 MeV, le gain en énergie cinétique étant identique pour toutes les cavités.

Données utiles $U_{a\ \max} = 1$ kV ; $q = e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C ; $1\ \text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J ; gain par cavité qU (1.3)

Gain d'énergie cinétique dans une cavité : $\Delta E_c = q\,U_{a\ \max} = 1{,}60 \times 10^{-19} \times 1 \times 10^{3} = 1{,}6 \times 10^{-16}$ J.

Énergie à atteindre : $E_c = 8{,}0\ \text{MeV} = 8{,}0 \times 10^{6} \times 1{,}6 \times 10^{-19} = 1{,}28 \times 10^{-12}$ J.

Le proton part avec une énergie cinétique négligeable, donc :

$$N = \frac{E_c}{\Delta E_c} = \frac{1{,}28 \times 10^{-12}}{1{,}6 \times 10^{-16}}$$

$N = 8{,}0 \times 10^{3}$: il faut environ 8 000 cavités.

COMPRENDRE

Vérification : 800 m pour 8 000 cavités, soit environ 10 cm par ensemble « cavité + bloc » en moyenne, ce qui est plausible.

MÉTHODE

Plus rapide en électronvolts : une charge e accélérée sous 1 V gagne 1 eV. Sous 1 kV, le gain est de 1 keV par cavité, d'où $N = \frac{8{,}0 \times 10^{6}\ \text{eV}}{1 \times 10^{3}\ \text{eV}}$.

À LA CALCULATRICE

