Capteur d'arrosage capacitif

Bac 2023 Nouvelle-Calédonie Jour 1 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

A.1 Déduire des permittivités relatives de l'air et de l'eau le milieu pour lequel la capacité du condensateur est la plus grande.

Données utiles $C = \dfrac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,S}{\ell}$; $\varepsilon_{r,\text{air}} = 1{,}0$; $\varepsilon_{r,\text{eau}} = 80$

ε_0, S et ℓ ne dépendent pas du milieu : la capacité C est proportionnelle à ε_r.

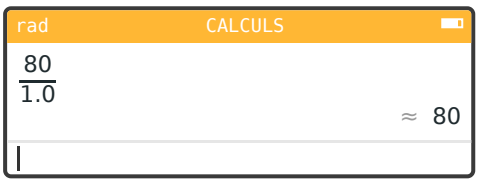
Or $\varepsilon_{r,\text{eau}} > \varepsilon_{r,\text{air}}$, donc $\dfrac{C_{\text{eau}}}{C_{\text{air}}} = \dfrac{\varepsilon_{r,\text{eau}}}{\varepsilon_{r,\text{air}}} = \dfrac{80}{1{,}0} = 80$.

La capacité est la plus grande dans l'**eau** : $C_{\text{eau}} = 80\,C_{\text{air}}$.

MÉTHODE

Pour comparer deux situations, repérer ce qui ne change pas (ε_0, S, ℓ) puis former le rapport des deux grandeurs : les constantes se simplifient, aucune valeur de S ou de ℓ n'est nécessaire.

À LA CALCULATRICE



A.2 Justifier que, pour une même charge q portée par une armature, la tension aux bornes du condensateur est plus faible dans l'eau que dans l'air.

Données utiles $C_{\text{eau}} > C_{\text{air}}$ (A.1)

La charge portée par une armature et la tension aux bornes du condensateur sont liées par $q = C \times u$, soit $u = \dfrac{q}{C}$.

À charge q identique, la tension est inversement proportionnelle à la capacité. Comme $C_{\text{eau}} > C_{\text{air}}$:

$u_{\text{eau}} = \dfrac{q}{C_{\text{eau}}} < u_{\text{air}} = \dfrac{q}{C_{\text{air}}}$: la tension est plus faible dans l'eau.

COMPRENDRE

C'est le principe du capteur : le sol humide augmente la capacité, ce qui modifie une tension, seule grandeur que le microcontrôleur sait lire. D'après A.1, la tension serait ici 80 fois plus faible dans l'eau.

B.1 Établir, pour le circuit de la figure 3, la relation entre E, $u_R(t)$ et $u_C(t)$.

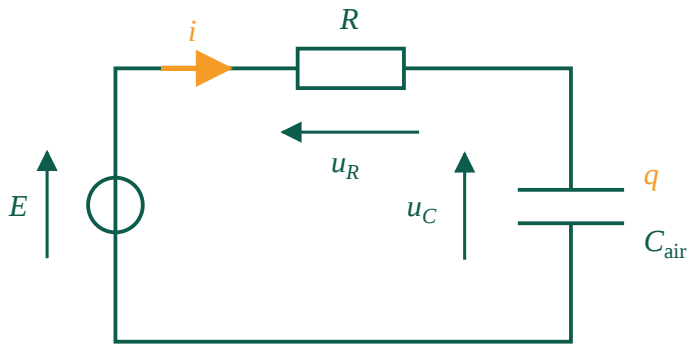
Loi des mailles dans l'unique maille du circuit, avec les flèches de tension de la figure 3 :

$E - u_R(t) - u_C(t) = 0$

$E = u_R(t) + u_C(t)$

PIÈGE

Les signes dépendent du sens des flèches. Ici u_R et u_C s'opposent à E quand on parcourt la maille : elles s'ajoutent donc dans le même membre.



B.1 · Figure 3 du sujet, avec le sens choisi pour i et l'armature qui porte la charge q

B.2 Donner la relation entre l'intensité du courant $i(t)$ et la charge électrique $q(t)$ qui traverse une portion de circuit. Préciser les unités.

L'intensité est le débit de charge électrique : c'est la dérivée de la charge par rapport au temps.

$i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$, avec i en ampères (A), q en coulombs (C) et t en secondes (s).

COMPRENDRE
Un ampère correspond à un coulomb par seconde : $1\ \mathrm{A} = 1\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. La même relation donne la charge de l'armature du condensateur reliée à la résistance (convention récepteur).

B.3 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par u_C est $\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{R \times C_{\text{air}}} u_C(t) = \dfrac{E}{R \times C_{\text{air}}}$.

Données utiles $E = u_R(t) + u_C(t)$ (B.1) ; $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$ (B.2)

Loi d'Ohm pour la résistance (convention récepteur) : $u_R(t) = R \times i(t)$.

Pour le condensateur : $q(t) = C_{\text{air}} \times u_C(t)$. Comme C_{air} est constante :

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = C_{\text{air}} \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{donc} \quad u_R(t) = R \times C_{\text{air}} \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

La loi des mailles devient : $R \times C_{\text{air}} \dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E$.

En divisant chaque terme par $R \times C_{\text{air}}$:

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R \times C_{\text{air}}} u_C(t) = \frac{E}{R \times C_{\text{air}}}$$

PIÈGE
Passer directement de la loi des mailles au résultat. Dans un « montrer que », chaque relation utilisée doit être écrite, sinon les points de la démarche sont perdus.

MÉTHODE
Toujours les mêmes quatre étapes : loi des mailles, loi d'Ohm, $q = C\,u_C$, $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. On remplace ensuite pour ne garder que u_C et sa dérivée.

B.4.1 Montrer que $u_C(t) = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ est solution de l'équation différentielle à condition que $\tau = R \times C_{\text{air}}$.

On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

On remplace dans le membre de gauche de l'équation différentielle :

$$\frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R \times C_{\text{air}}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{R \times C_{\text{air}}}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R \times C_{\text{air}}}$$

Ce membre est égal à $\dfrac{E}{R \times C_{\text{air}}}$ à tout instant t si, et seulement si, $\dfrac{1}{\tau} - \dfrac{1}{R \times C_{\text{air}}} = 0$.

De plus $u_C(0) = E \times (1 - e^0) = 0$: le condensateur est bien initialement déchargé.

La fonction proposée est solution à condition que $\tau = R \times C_{\text{air}}$.

PIÈGE
Oublier le facteur $\dfrac{1}{\tau}$ en dérivant : la dérivée de $e^{-\frac{t}{\tau}}$ est $-\dfrac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$. Le signe « $-$ » se combine avec celui de la parenthèse et donne une dérivée positive.

MÉTHODE
Vérifier une solution : dériver, remplacer dans l'équation, regrouper les termes en exponentielle. L'égalité doit être vraie à chaque instant, donc le coefficient de l'exponentielle doit être nul.

B.4.2 Nommer le produit des grandeurs R et C_{air}.

Le produit $\tau = R \times C_{\text{air}}$ est la **constante de temps** (ou temps caractéristique) du circuit RC ; elle s'exprime en secondes.

COMPRENDRE
Elle fixe la rapidité de la charge : à $t = \tau$, u_C atteint 63 % de E ; au bout de 5τ, la charge est terminée à moins de 1 % près.

B.5 Montrer qu'au bout d'un temps suffisamment long, la charge du condensateur vaut $Q_{\text{chargé}} = C_{\text{air}} \times E$.

Données utiles $u_C(t) = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ (B.4.1)

Quand t devient très grand devant τ, $e^{-\frac{t}{\tau}}$ tend vers 0, donc $u_C(t)$ tend vers $E \times (1 - 0) = E$.

Or la charge du condensateur est $q(t) = C_{\text{air}} \times u_C(t)$. Une fois le condensateur chargé :

$$Q_{\text{chargé}} = C_{\text{air}} \times E$$

MÉTHODE
Autre raisonnement possible : en fin de charge, u_C ne varie plus, donc $i = C_{\text{air}} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$ et $u_R = R\,i = 0$. La loi des mailles donne alors $u_C = E$.

C.1 Recopier puis compléter la ligne 6 du script pour y faire figurer la valeur mesurée lorsque le capteur est uniquement dans l'eau.

Données utiles valeur lue dans l'eau : 217

```
const int eau = 217;
```

PIÈGE
Ne pas oublier le point-virgule qui termine l'instruction, ni confondre les deux valeurs : 595 est la valeur dans l'air (ligne 5), 217 celle dans l'eau.

C.2 Expliquer pourquoi la valeur mesurée par le capteur planté dans le pot est forcément comprise entre 217 et 595.

La terre du pot contient plus ou moins d'eau : sa permittivité relative est intermédiaire entre celle du milieu sans eau (l'air, capteur « sec ») et celle de l'eau seule.

La capacité étant proportionnelle à ε_r (A.1) : $C_{\text{air}} < C_{\text{terre}} < C_{\text{eau}}$.

La valeur lue dépend de la tension aux bornes du condensateur, d'autant plus faible que la capacité est grande (A.2) : elle diminue quand l'humidité augmente.

La valeur lue dans la terre est comprise entre celle de l'eau (217, valeur minimale) et celle de l'air (595, valeur maximale).

COMPRENDRE
Les deux mesures préalables sont un étalonnage : elles fixent les bornes 0 % d'humidité (air, 595) et 100 % (eau, 217). La valeur la plus grande correspond au milieu le plus sec.

C.3 Proposer une expression littérale du pourcentage d'humidité relative en fonction des variables « valeur_exp », « sec » et « eau ».

On suppose que le pourcentage varie linéairement avec la valeur lue, de 0 % pour `valeur_exp = sec` (air) à 100 % pour `valeur_exp = eau` (eau) :

$$\text{pourcentage} = \frac{\text{sec} - \text{valeur_exp}}{\text{sec} - \text{eau}} \times 100$$

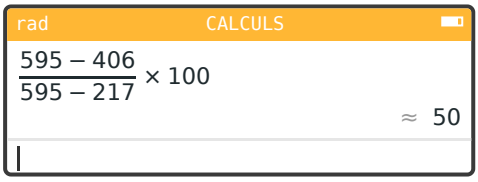
Vérification : pour `valeur_exp = sec` on obtient 0 ; pour `valeur_exp = eau` on obtient 100.

$$\text{pourcentage} = \frac{\text{sec} - \text{valeur_exp}}{\text{sec} - \text{eau}} \times 100$$

PIÈGE
Écrire $\frac{\text{valeur_exp}}{\text{sec}} \times 100$: cette expression donne 100 % dans l'air et 36 % dans l'eau. La valeur lue diminue quand l'humidité augmente et ne descend pas jusqu'à zéro.

MÉTHODE
Tester l'expression aux deux bornes de l'étalonnage, puis sur une valeur intermédiaire : pour une valeur lue de 406, à mi-chemin entre 217 et 595, on doit trouver 50 %.

À LA CALCULATRICE



C.4 Donner le code à écrire à la ligne 17 pour calculer la valeur de la variable « pourcentage_humidite ».

Données utiles expression du pourcentage (C.3)

On traduit l'expression de la question C.3 avec les noms de variables du script :

```
int pourcentage_humidite = 100.0 * (sec - valeur_exp) / (sec - eau);
```

PIÈGE
Diviser d'abord deux entiers : `(sec - valeur_exp) / (sec - eau)` vaut 0 tant que le capteur n'est pas dans l'eau, car la division entre entiers est tronquée. Écrire `100.0` impose un calcul décimal.

COMPRENDRE
La variable étant déclarée `int`, le résultat décimal est tronqué à l'entier inférieur à l'affectation : 49,7 s'affiche 49. Toute écriture équivalente à l'expression de C.3 est acceptée.