Imprimante à jet d'encre continu

Bac 2023 Métropole Septembre Jour 2 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Indiquer les signes des charges portées par les plaques P_1 et P_2, puis justifier que le champ $\vec{E}$ est orienté de P_1 vers P_2.

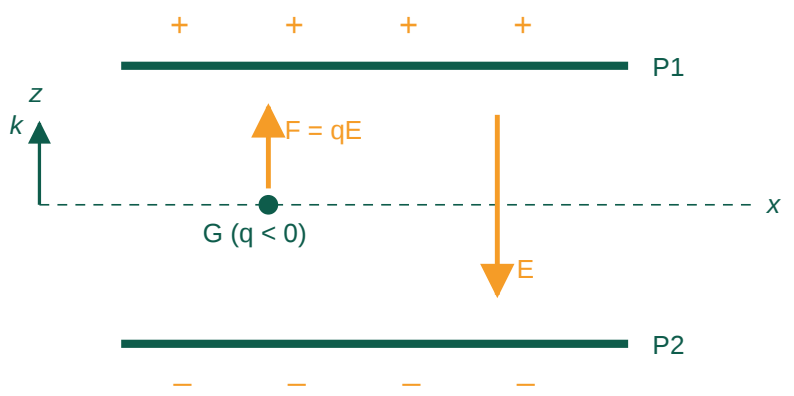
Données utiles $q < 0$; goutte déviée vers le haut ; $\vec{E} = -E\,\vec{k}$

La goutte, de charge négative, est déviée vers P_1 (en haut) : elle est attirée par P_1 et repoussée par P_2. Donc P_1 porte des charges positives et P_2 des charges négatives.

La force électrique s'écrit $\vec{F} = q\,\vec{E}$. Comme $q < 0$, $\vec{E}$ est de sens opposé à $\vec{F}$. Or $\vec{F}$ est dirigée vers le haut, de P_2 vers P_1.

P_1 est chargée positivement, P_2 négativement ; $\vec{E}$ est dirigé vers le bas, de P_1 vers P_2.

COMPRENDRE
Dans un condensateur plan, le champ va toujours de la plaque positive vers la plaque négative. C'est cohérent avec la donnée $\vec{E} = -E\,\vec{k}$: le champ est opposé à $\vec{k}$.



Q1 · Déflecteur : signes des plaques, champ et force sur la goutte

Q2 Établir l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_G$ de la goutte en fonction de m, q et $\vec{E}$.

Système {goutte G}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Force prise en compte : la force électrique $\vec{F} = q\,\vec{E}$ (poids et action de l'air négligés).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$, soit $q\,\vec{E} = m\,\vec{a}_G$.

$$\vec{a}_G = \frac{q}{m}\,\vec{E}$$

PIÈGE
Oublier de nommer le système, le référentiel galiléen et la loi utilisée : ces trois éléments sont attendus avant toute relation vectorielle.

COMPRENDRE
Comme $q < 0$, l'accélération est opposée au champ : elle est dirigée vers le haut, comme la force. Elle est constante car le champ est uniforme.

Q3 Montrer que les équations horaires du mouvement de G dans le déflecteur sont $x_G(t) = v_0\,t$ et $z_G(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{q\,E}{m}\,t^2$.

Données utiles $\vec{a}_G = \dfrac{q}{m}\vec{E}$ (Q2) ; $\vec{E} = -E\,\vec{k}$; à $t = 0$: G en O, $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{i}$

Avec $\vec{E} = -E\,\vec{k}$, on a $\vec{a}_G = -\dfrac{q\,E}{m}\,\vec{k}$, donc :

$$a_x = 0 \qquad a_z = -\frac{q\,E}{m}$$

Comme $\vec{a}_G = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives : $v_x = C_1$ et $v_z = -\dfrac{q\,E}{m}\,t + C_2$.

À $t = 0$, $\vec{v}_G = v_0\,\vec{i}$: $C_1 = v_0$ et $C_2 = 0$. Donc $v_x = v_0$ et $v_z = -\dfrac{q\,E}{m}\,t$.

Comme $\vec{v}_G = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on intègre encore : $x_G = v_0\,t + C_3$ et $z_G = -\dfrac{1}{2}\dfrac{q\,E}{m}\,t^2 + C_4$.

À $t = 0$, G est en O : $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$.

$$\boxed{x_G(t) = v_0\,t \text{ et } z_G(t) = -\frac{1}{2}\frac{q\,E}{m}\,t^2}$$

PIÈGE
Le signe « $-$ » ne signifie pas que la goutte descend : q est négatif, donc $-\dfrac{q\,E}{m}$ est positif et z_G augmente.

MÉTHODE
Accélération, puis vitesse, puis position : deux intégrations successives, et à chaque étape les constantes se déterminent avec les conditions initiales, écrites explicitement.

Q4 Exprimer la date t_S à laquelle la goutte sort du déflecteur, puis montrer que la déviation HS vaut environ 0,9 mm.

Données utiles $L = 2 \times 10^{-2}$ m ; $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $q = -4 \times 10^{-13}$ C ; $E = 9 \times 10^5\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$; $m = 2 \times 10^{-10}$ kg

La goutte sort du déflecteur quand $x_G(t_S) = L$, soit $v_0\,t_S = L$:

$$t_S = \frac{L}{v_0} = \frac{2 \times 10^{-2}}{20} = 1 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$$

La déviation est l'ordonnée de G à cette date : $HS = z_G(t_S) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{q\,E}{m}\left(\dfrac{L}{v_0}\right)^2$

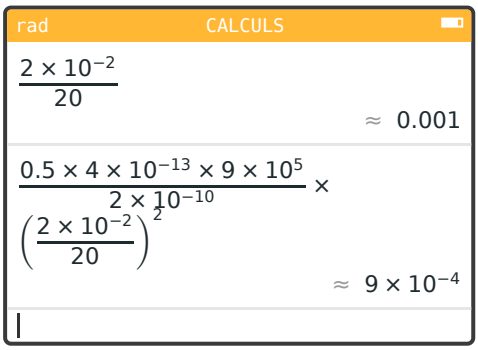
$$HS = -\frac{1}{2} \times \frac{(-4 \times 10^{-13}) \times 9 \times 10^5}{2 \times 10^{-10}} \times \left(\frac{2 \times 10^{-2}}{20}\right)^2 = 9 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

$$\boxed{t_S = \frac{L}{v_0} \text{ et } HS = 9 \times 10^{-4}\ \mathrm{m} = 0{,}9\ \mathrm{mm}\text{, valeur attendue.}}$$

PIÈGE
Laisser L en centimètres, ou perdre le signe de q : avec $q = -4 \times 10^{-13}$ C, les deux signes « $-$ » se compensent et HS est positive.

COMPRENDRE
Les données n'ont qu'un chiffre significatif : le résultat s'écrit avec un seul chiffre, 9×10^{-4} m.

À LA CALCULATRICE



Q5 Exprimer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}_S$ de la goutte à la date t_S.

Données utiles $v_x = v_0$ et $v_z = -\dfrac{q\,E}{m}\,t$ (Q3) ; $t_S = \dfrac{L}{v_0}$ (Q4)

On reprend les coordonnées de la vitesse établies à la question 3, à la date $t = t_S = \dfrac{L}{v_0}$.

$$v_{Sx} = v_0 \text{ et } v_{Sz} = -\frac{q\,E}{m}\,t_S = -\frac{q\,E\,L}{m\,v_0}$$

COMPRENDRE
La vitesse horizontale n'a pas changé : aucune force n'agit selon l'axe (Ox). Seule la composante verticale a augmenté pendant la traversée.

Q6 Montrer que l'angle α entre l'axe (Ox) et le vecteur vitesse $\vec{v}_S$ vérifie $\tan\alpha = -\dfrac{q\,E\,L}{m\,v_0^2}$.

Données utiles $v_{Sx} = v_0$ et $v_{Sz} = -\dfrac{q\,E\,L}{m\,v_0}$ (Q5)

Le vecteur $\vec{v}_S$ et ses deux composantes forment un triangle rectangle : v_{Sx} est le côté adjacent à α, v_{Sz} le côté opposé.

$$\tan\alpha = \frac{v_{Sz}}{v_{Sx}} = \frac{-\dfrac{q\,E\,L}{m\,v_0}}{v_0}$$

$$\tan\alpha = -\frac{q\,E\,L}{m\,v_0^2}$$

MÉTHODE
La direction d'un vecteur vitesse se lit toujours sur ses coordonnées : la tangente de l'angle avec l'horizontale est le rapport de la composante verticale sur la composante horizontale.

Q7 En déduire la valeur de la hauteur $H'I$ du point d'impact I de la goutte sur le support d'impression. Commenter.

Données utiles $HS = 9 \times 10^{-4}$ m (Q4) ; $\tan\alpha = -\dfrac{q\,E\,L}{m\,v_0^2}$ (Q6) ; $D = 3 \times 10^{-2}$ m ; $h = 3$ mm

Après S, le mouvement est rectiligne uniforme : la goutte suit la droite portée par $\vec{v}_S$, inclinée de α sur l'horizontale.

$$\tan\alpha = -\frac{(-4\times10^{-13})\times 9\times10^{5}\times 2\times10^{-2}}{2\times10^{-10}\times 20^{2}} = 0{,}09$$

Dans le triangle $SS'I$ rectangle en S', avec $SS' = D$: $\tan\alpha = \dfrac{S'I}{D}$, donc $S'I = D\,\tan\alpha$.

Comme $H'S' = HS$: $\quad H'I = HS + D\,\tan\alpha$

$$H'I = 9\times10^{-4} + 3\times10^{-2}\times 0{,}09 = 3{,}6\times10^{-3}\ \text{m}$$

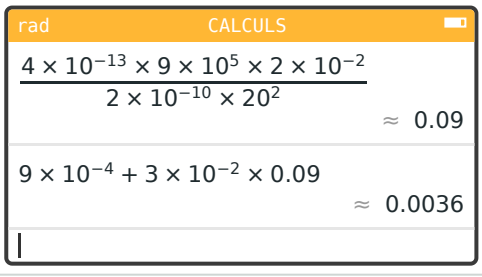
Commentaire : cette hauteur est du même ordre de grandeur que la hauteur moyenne d'un caractère, $h = 3$ mm. Le modèle est cohérent avec l'usage de l'imprimante.

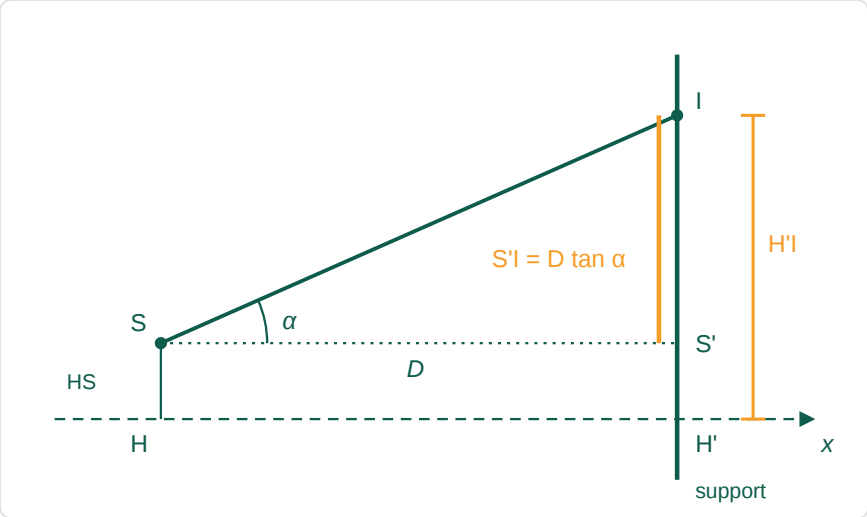
$H'I = 3{,}6\times10^{-3}$ m $= 3{,}6$ mm, soit environ 4 mm, proche de $h = 3$ mm.

PIÈGE
Répondre $D\,\tan\alpha = 2{,}7$ mm en oubliant la déviation HS déjà acquise dans le déflecteur : le point S n'est pas sur l'axe (Ox).

COMPRENDRE
L'essentiel de la déviation (2,7 mm sur 3,6 mm) se fait après le déflecteur, en ligne droite. Avec des données à un chiffre significatif, on ne peut garantir que « environ 4 mm ».

À LA CALCULATRICE





Q7 · Trajet de la goutte après le déflecteur : triangle SS'I

Q8 Proposer, en justifiant, plusieurs moyens permettant d'augmenter la taille du caractère imprimé sur le support d'impression.

Données utiles $H'I = HS + D\tan\alpha$ (Q7) ; $HS = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{L}{v_0}\right)^2$ (Q4) ; $\tan\alpha = -\frac{qEL}{mv_0^2}$ (Q6)

Un caractère plus grand demande une hauteur d'impact $H'I$ plus grande. En regroupant les expressions précédentes :

$$H'I = -\frac{qEL}{mv_0^2}\left(\frac{L}{2}+D\right) = \frac{|q|EL}{mv_0^2}\left(\frac{L}{2}+D\right)$$

$H'I$ augmente si l'on :

- augmente la valeur E du champ, donc la tension entre les plaques ;
- augmente la valeur absolue de la charge q des gouttes ;
- éloigne le support d'impression (augmenter D) ;
- allonge les plaques (augmenter L) ;
- diminue la vitesse d'éjection v_0 : la goutte reste plus longtemps dans le champ.

Augmenter E, $|q|$, D ou L, ou diminuer v_0 : dans chaque cas $H'I = \frac{|q|EL}{mv_0^2}\left(\frac{L}{2}+D\right)$ augmente.

COMPRENDRE
Augmenter E, $|q|$ ou L, ou réduire v_0, accroît aussi HS : la goutte risque de toucher la plaque P_1. Éloigner le support est le seul moyen qui ne modifie pas la trajectoire dans le déflecteur.

MÉTHODE
Pour discuter l'influence de paramètres, écrire d'abord l'expression littérale complète de la grandeur, puis regarder chaque paramètre : au numérateur il la fait croître, au dénominateur décroître.