Mars vue sous l'œil de Kepler

Bac 2023 Métropole Septembre Jour 2 · Exercice 2 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q1 Énoncer les deux premières lois de Kepler, puis justifier avec la deuxième loi et la figure 1 que le mouvement de Mars n'est pas uniforme.

Première loi (loi des orbites) : dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire d'une planète est une ellipse dont le centre du Soleil est l'un des foyers.

Deuxième loi (loi des aires) : le segment qui relie le centre du Soleil à celui de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

Sur la figure 1, les aires A_1 et A_2 sont égales et balayées pendant la même durée Δt. Près du Soleil, le segment Soleil-Mars est court : l'arc d'ellipse parcouru, de longueur ℓ_1, est plus long que l'arc ℓ_2 parcouru loin du Soleil.

Comme $v = \dfrac{\ell}{\Delta t}$ avec la même durée, $\ell_1 > \ell_2$ donne $v_1 > v_2$.

La valeur de la vitesse de Mars change au cours de la révolution : le mouvement n'est **pas uniforme**.

PIÈGE
Écrire que le Soleil est « au centre » de l'ellipse : il occupe un foyer. Et comparer les aires ne suffit pas, il faut comparer les longueurs des arcs parcourus pendant la même durée.

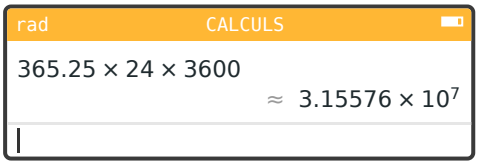
COMPRENDRE
Mars est la plus rapide au point le plus proche du Soleil (périhélie) et la plus lente au point le plus éloigné (aphélie).

Q2 Recopier la ligne 8 du programme et la compléter.

La variable `an` contient la durée d'une année en secondes : $1\ \text{an} = 365{,}25\ \text{j} = 365{,}25 \times 24 \times 3600\ \text{s}$.

```
an = 365.25*24*3600
```

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
En Python, le séparateur décimal est le point et la multiplication s'écrit `*`. Une virgule ou le signe × provoquent une erreur.

COMPRENDRE
On obtient $3{,}16 \times 10^7$ s, en accord avec la période de la Terre du tableau 1 ($3{,}2 \times 10^7$ s). Écrire `365*24*3600` est accepté aussi.

Q3 Proposer un commentaire pour les lignes 16 et 17 du programme, en précisant leur finalité et les unités des grandeurs calculées.

Ligne 13 : `am = a*au` est le demi-grand axe converti en mètres.
Ligne 14 : `Ts = T*an` est la période convertie en secondes.

Ligne 16 : `acube = am**3 # cube du demi-grand axe, en m^3`

Ligne 17 : `Tcarre = Ts**2 # carré de la période de révolution, en s^2`

Ces deux lignes calculent a^3 (en m^3) et T^2 (en s^2), les deux grandeurs portées sur les axes de la figure 3.

MÉTHODE
Pour l'unité d'une variable calculée, remonter les lignes du programme : `a` est en au, `am` en m, donc `am**3` en m^3.

Q4 Commenter la figure 3 au regard des lois de Kepler.

Les points $(a^3\ ;\ T^2)$ des planètes sont alignés sur une droite qui passe par l'origine : T^2 est proportionnel à a^3.

$$T^2 = k \times a^3 \quad \text{soit} \quad \frac{T^2}{a^3} = k$$

La figure 3 vérifie la **troisième loi de Kepler** (loi des périodes) : le rapport $\dfrac{T^2}{a^3}$ a la même valeur pour toutes les planètes qui tournent autour du Soleil.

PIÈGE
Dire seulement « c'est une droite » ne suffit pas. C'est le passage par l'origine qui prouve la proportionnalité.

Q5 Déterminer la valeur du demi-grand axe a_{Mars} de l'orbite de Mars et justifier que Mars est la quatrième planète en partant du Soleil.

Données utiles $T_{\text{Mars}} = 687$ j ; figure 3 ; tableau 1 : $a_{\text{Terre}} = 1{,}5 \times 10^{11}$ m, $a_{\text{Jupiter}} = 7{,}8 \times 10^{11}$ m

Coefficient directeur de la droite de la figure 3, qui passe par l'origine et par le point $(1{,}00 \times 10^{34}\ \text{m}^3\ ;\ 3{,}0 \times 10^{15}\ \text{s}^2)$:

$$k = \frac{3{,}0 \times 10^{15}}{1{,}00 \times 10^{34}} = 3{,}0 \times 10^{-19}\ \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$$

Période en secondes : $T_{\text{Mars}} = 687 \times 24 \times 3600 = 5{,}94 \times 10^7$ s.

Troisième loi de Kepler : $T_{\text{Mars}}^2 = k \times a_{\text{Mars}}^3$, donc

$$a_{\text{Mars}} = \sqrt[3]{\frac{T_{\text{Mars}}^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(5{,}94 \times 10^7)^2}{3{,}0 \times 10^{-19}}}$$

$a_{\text{Mars}} = 2{,}3 \times 10^{11}$ m

Dans le tableau 1, trois planètes ont un demi-grand axe plus petit (Mercure, Vénus, Terre) et $a_{\text{Terre}} < a_{\text{Mars}} < a_{\text{Jupiter}}$: Mars est bien la quatrième planète en partant du Soleil.

PIÈGE
Laisser la période en jours alors que k est en $\text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$. Et ne pas confondre racine cubique et racine carrée : à la calculatrice, puissance $1/3$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la lecture graphique de k. Vérification : $a_{\text{Mars}} \approx 1{,}5$ au, valeur connue pour Mars.

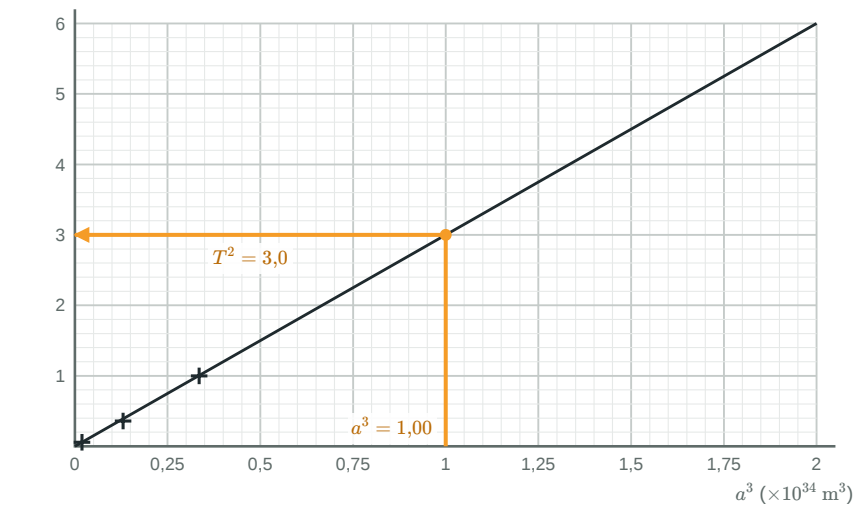
À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$687 \times 24 \times 3600$ → $59\,356\,800$

$\dfrac{3.0 \times 10^{15}}{1.00 \times 10^{34}}$ → $\approx 3 \times 10^{-19}$

$\sqrt[3]{\dfrac{59\,356\,800^2}{3.0 \times 10^{-19}}}$ → $\approx 2.273037 \times 10^{11}$



Q5 · Figure 3 du sujet : lecture d'un point de la droite modèle

Q6 Préciser quelle lentille, L_1 ou L_2, correspond à l'objectif et laquelle correspond à l'oculaire.

La lumière venant de l'astre traverse d'abord L_1, placée du côté de l'objet. L'œil se place derrière L_2.

L_1 est l'**objectif** ; L_2 est l'**oculaire**.

COMPRENDRE
Sur le schéma, l'objectif est aussi la lentille de plus grande distance focale : $O_1F_1' > O_2F_2'$.

Q7 Tracer sur la figure A1 la marche des rayons issus de B_∞ à travers L_1 puis L_2, en faisant apparaître l'image intermédiaire A_1B_1.

À travers L_1 : le rayon qui passe par le centre optique O_1 n'est pas dévié ; le rayon qui passe par le foyer objet F_1 ressort parallèle à l'axe optique.

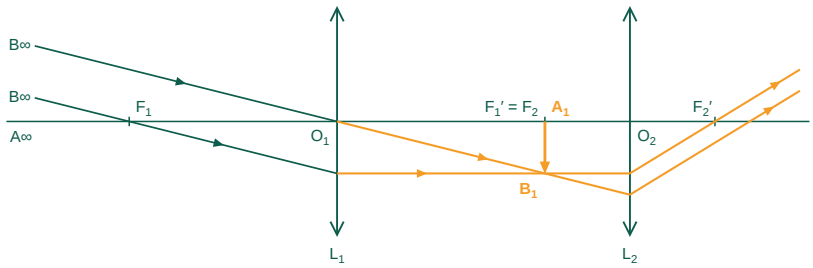
Ces deux rayons se coupent en B_1, dans le plan focal image de L_1. A_1 est sur l'axe, confondu avec $F_1' = F_2$.

À travers L_2 : le rayon parallèle à l'axe ressort en passant par le foyer image F_2'. Comme B_1 est dans le plan focal objet de L_2, l'autre rayon ressort parallèle au premier.

L'image intermédiaire A_1B_1 est dans le plan focal commun, renversée ; les rayons sortent de L_2 parallèles entre eux (image finale à l'infini).

PIÈGE
Faire converger les rayons après l'oculaire. La lunette est afocale : le faisceau issu de B_∞ sort parallèle.

MÉTHODE
Objet à l'infini : image dans le plan focal image. Objet dans le plan focal objet : image à l'infini. Ces deux règles suffisent pour toute lunette afocale.



Q7 · Figure A1 complétée : en orange, les rayons issus de B_∞ et l'image intermédiaire A_1B_1

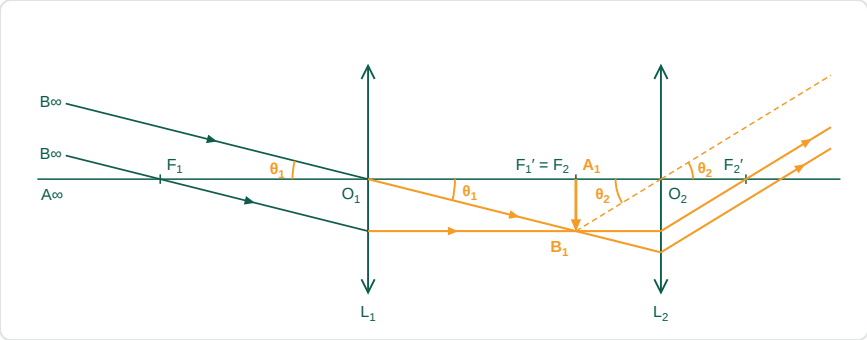
Q8 Représenter sur la figure A1 les angles θ_1 (Mars vue à l'œil nu) et θ_2 (Mars vue à travers la lunette).

θ_1 est l'angle entre l'axe optique et les rayons incidents venant de B_∞ : on le marque en O_1. On le retrouve dans le triangle $O_1A_1B_1$ (angles opposés par le sommet).

θ_2 est l'angle entre l'axe optique et les rayons qui sortent de l'oculaire. Ces rayons sont parallèles à la droite (B_1O_2) : on retrouve θ_2 en O_2, dans le triangle $O_2A_1B_1$.

θ_1 : angle $\widehat{A_1O_1B_1}$; θ_2 : angle $\widehat{A_1O_2B_1}$ (voir la figure).

COMPRENDRE
Le rayon (B_1O_2), en pointillés, n'existe pas forcément dans le faisceau réel. C'est un rayon de construction : il donne la direction de sortie.



Q8 · Figure A1 complétée : angles θ_1 (avant l'objectif) et θ_2 (après l'oculaire)

Q9 À partir de $G = \dfrac{\theta_2}{\theta_1}$, établir que $G = \dfrac{f'_{\text{obj}}}{f'_{\text{ocu}}}$.

Dans le triangle $O_1A_1B_1$, rectangle en A_1 : $\tan\theta_1 = \dfrac{A_1B_1}{O_1A_1} = \dfrac{A_1B_1}{f'_{\text{obj}}}$.

Dans le triangle $O_2A_1B_1$, rectangle en A_1 : $\tan\theta_2 = \dfrac{A_1B_1}{O_2A_1} = \dfrac{A_1B_1}{f'_{\text{ocu}}}$.

Les angles sont petits : $\tan\theta \approx \theta$ (en radian), donc $\theta_1 = \dfrac{A_1B_1}{f'_{\text{obj}}}$ et $\theta_2 = \dfrac{A_1B_1}{f'_{\text{ocu}}}$.

$$G = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{A_1B_1}{f'_{\text{ocu}}} \times \frac{f'_{\text{obj}}}{A_1B_1}$$

$$\boxed{G = \frac{f'_{\text{obj}}}{f'_{\text{ocu}}}}$$

PIÈGE
Inverser le rapport. L'objectif (grande focale) est au numérateur : G est supérieur à 1.

MÉTHODE
L'image intermédiaire A_1B_1 est le côté commun aux deux triangles : l'exprimer deux fois, puis la simplifier dans le rapport.

Q10 Mars étant au plus près de la Terre, déterminer l'oculaire qui permet de voir Mars au moins aussi grosse que la Lune vue à l'œil nu.

Données utiles diamètre de Mars $h = 6\,794$ km ; distance $d = 62{,}07 \times 10^6$ km ; $\theta_{\text{Lune}} = 9{,}0 \times 10^{-3}$ rad ; $f'_{\text{obj}} = 900$ mm ; oculaires : 10 mm, 25 mm, 40 mm

Angle sous lequel Mars est vue à l'œil nu ($h \ll d$, angle petit) :

$$\theta_1 = \frac{h}{d} = \frac{6\,794}{62{,}07 \times 10^6} = 1{,}095 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

Il faut $\theta_2 \geqslant \theta_{\text{Lune}}$, c'est-à-dire $G \times \theta_1 \geqslant \theta_{\text{Lune}}$:

$$G \geqslant \frac{\theta_{\text{Lune}}}{\theta_1} = \frac{9{,}0 \times 10^{-3}}{1{,}095 \times 10^{-4}} = 82$$

Grossissements disponibles, $G = \dfrac{f'_{\text{obj}}}{f'_{\text{ocu}}} : \dfrac{900}{10} = 90$; $\dfrac{900}{25} = 36$; $\dfrac{900}{40} = 22{,}5$.

Seul l'oculaire de distance focale **10 mm** convient : $G = 90 \geqslant 82$.

PIÈGE
Convertir une seule des deux longueurs. Ici h et d sont toutes les deux en km et les focales toutes les deux en mm : les rapports se calculent directement.

COMPRENDRE
Plus la focale de l'oculaire est courte, plus le grossissement est grand. Autre rédaction possible : $f'_{\text{ocu}} \leqslant \dfrac{f'_{\text{obj}}}{82} \approx 11$ mm.

À LA CALCULATRICE

