Défibrillateur cardiaque

Bac 2022 Métropole Jour 1 · Exercice 4 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Indiquer la position de l'interrupteur qui permet de charger le condensateur.

Pour se charger, le condensateur doit être relié au générateur, à travers le conducteur ohmique de résistance r.

L'interrupteur est en **position 1**.

Q2 À l'aide de la loi des mailles, établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pendant la charge.

Loi des mailles dans le circuit de charge, avec les flèches de la figure 1 : $E = u_r + u_C$.

Loi d'Ohm : $u_r = r\,i$.

Pour le condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$, avec C constante, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

On remplace dans la loi des mailles :

$$r\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$

PIÈGE
Donner l'équation sans citer les trois relations. La réponse figure dans l'énoncé : seule la démonstration rapporte des points.

MÉTHODE
Circuit RC, toujours trois étapes : 1) loi des mailles ; 2) loi d'Ohm pour la résistance ; 3) $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ pour le condensateur. On élimine ensuite i.

Q3 Vérifier que $u_C = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_{\text{charge}}}\right)$ est solution de l'équation différentielle, en précisant l'expression et l'unité de la constante.

On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau_{\text{charge}}}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_{\text{charge}}}$.

On calcule le membre de gauche de l'équation :

$$r\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E + E\left(\frac{r\,C}{\tau_{\text{charge}}} - 1\right)\mathrm{e}^{-t/\tau_{\text{charge}}}$$

Ce membre est égal à E à chaque instant si, et seulement si, $\dfrac{r\,C}{\tau_{\text{charge}}} - 1 = 0$.

De plus $u_C(0) = E\,(1-1) = 0$: le condensateur est bien déchargé au départ.

La fonction est solution avec $\tau_{\text{charge}} = r\,C$, qui s'exprime en **secondes** (r en Ω, C en F).

PIÈGE
Oublier le facteur $\dfrac{1}{\tau_{\text{charge}}}$ et le changement de signe en dérivant l'exponentielle : la dérivée de $-\mathrm{e}^{-t/\tau}$ est $+\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

COMPRENDRE
Dans l'équation, $r\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ s'ajoute à une tension : c'est donc une tension, et $r\,C$ est forcément une durée. C'est le temps caractéristique de la charge.

Q4 Tracer l'allure de $u_C(t)$ pendant la charge, en précisant sa valeur à $t = 0$ s et au bout d'un temps très long.

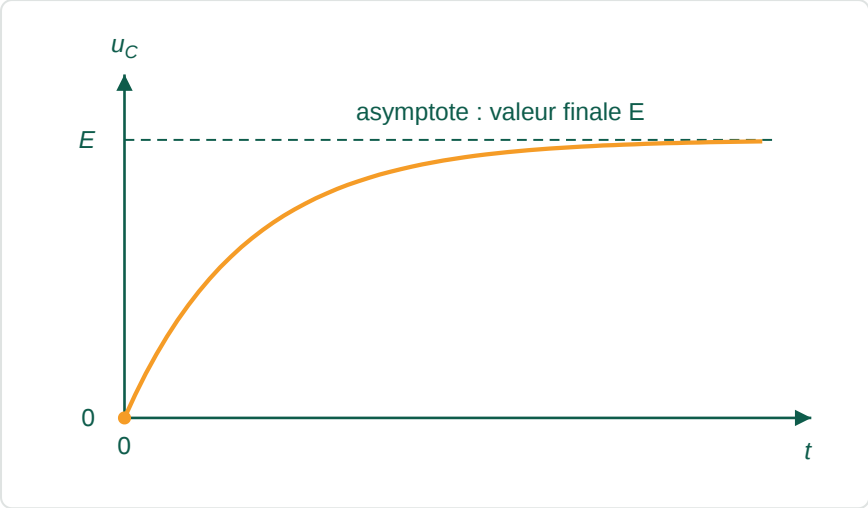
À $t = 0$ s : $u_C(0) = E\,(1 - \mathrm{e}^0) = 0$ V.

Quand t devient très grand, $\mathrm{e}^{-t/\tau_{\text{charge}}}$ tend vers 0, donc u_C tend vers E.

La courbe part de l'origine, croît de moins en moins vite et se rapproche de la droite horizontale $u_C = E$.

$u_C(0) = 0$ V et $u_C \to E$ au bout d'un temps très long.

PIÈGE
Tracer une courbe qui atteint E puis forme un palier anguleux, ou qui dépasse E. La tension s'approche de E sans jamais la franchir.



Q4 · Allure de $u_C(t)$ pendant la charge : départ à 0, tangente inclinée à l'origine, asymptote $u_C = E$

Q5 Montrer qu'à la date $t_1 = 5 \times \tau_{\text{charge}}$, la tension u_C a atteint 99 % de sa valeur finale.

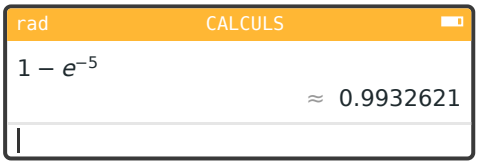
La valeur finale est E (Q4). À la date t_1 :

$$u_C(t_1) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-5\,\tau_{\text{charge}}/\tau_{\text{charge}}}\right) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-5}\right) = 0{,}993 \times E$$

$\dfrac{u_C(t_1)}{E} = 0{,}993 \approx 99\ \%$: la valeur attendue est retrouvée.

COMPRENDRE
Le résultat ne dépend ni de r ni de C : pour tout circuit RC, la charge est considérée comme terminée après $5\,\tau$. Ce critère resservira pour la décharge (Q8).

À LA CALCULATRICE



Q6 Déterminer graphiquement l'instant t_2 où l'interrupteur a été basculé de la position 1 à la position 2.

Données utiles courbe de l'annexe

Tant que l'interrupteur est en position 1, le condensateur reste chargé : u_C est constante, voisine de 6,1 V. La décharge débute au moment du basculement, donc à l'instant où u_C commence à diminuer.

Sur l'annexe, le dernier point du palier a pour abscisse 0,024 s.

$t_2 \approx 0{,}024$ s

COMPRENDRE
Les points sont espacés de 0,002 s : le basculement a lieu entre 0,024 s et 0,026 s. Une lecture de 0,025 s est tout aussi recevable.

Q7 Évaluer graphiquement, en faisant apparaître la démarche sur l'annexe, le temps caractéristique de décharge τ_{graph}. Commenter.

Données utiles $R = 10\ \text{k}\Omega$; $C = 1{,}5\ \mu\text{F}$; $t_2 = 0{,}024$ s (Q6) ; tension initiale 6,1 V (annexe)

Pendant une décharge, au bout d'une durée τ la tension vaut 37 % de sa valeur initiale :

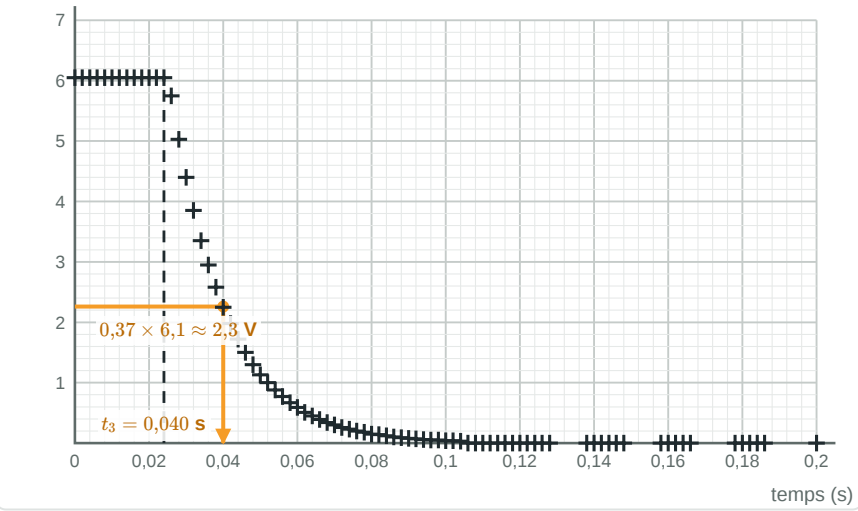
$0{,}37 \times 6{,}1 = 2{,}3$ V.

Sur l'annexe, $u_C = 2{,}3$ V à la date $t_3 = 0{,}040$ s. La décharge ayant commencé à t_2 :

$\tau_{\text{graph}} = t_3 - t_2 = 0{,}040 - 0{,}024 = 0{,}016$ s.

Valeur attendue : $\tau = RC = 10 \times 10^3 \times 1{,}5 \times 10^{-6} = 1{,}5 \times 10^{-2}$ s, soit 15 ms.

$\tau_{\text{graph}} \approx 0{,}016$ s $= 16$ ms, en accord avec $RC = 15$ ms compte tenu de la précision de la lecture (0,002 s).



Q7 · Annexe complétée : en tirets, la date t_2 du basculement ; en orange, la lecture de t_3 à 37 % de la tension initiale

PIÈGE

Lire directement $\tau = 0{,}040$ s sur l'axe. La décharge ne commence pas à $t = 0$: il faut retrancher t_2.

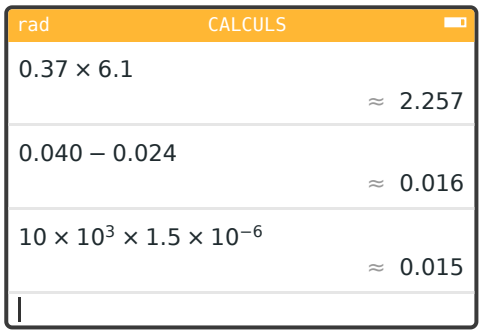
COMPRENDRE

Deux chiffres significatifs, comme R et C. Ce temps de quelques millisecondes est du même ordre que celui d'un défibrillateur commercial (Q8), comme l'annonce l'énoncé.

MÉTHODE

Autre tracé possible : la tangente à la courbe au début de la décharge coupe l'axe des temps à la date $t_2 + \tau$. La lecture à 37 % est plus précise sur des points expérimentaux.

À LA CALCULATRICE



Q8 Estimer la durée nécessaire pour que la décharge du condensateur du défibrillateur commercial soit considérée comme totale. Commenter.

Données utiles $C = 170\ \mu\text{F}$; $50\ \Omega \leqslant R \leqslant 150\ \Omega$; durée de délivrance du choc : moins de 4 s

Comme pour la charge (Q5), la décharge est considérée comme totale au bout de $\Delta t = 5\,\tau = 5\,RC$.

Pour $R = 50\ \Omega$: $\Delta t = 5 \times 50 \times 170 \times 10^{-6} = 4{,}3 \times 10^{-2}$ s.

Pour $R = 150\ \Omega$: $\Delta t = 5 \times 150 \times 170 \times 10^{-6} = 1{,}3 \times 10^{-1}$ s.

La décharge dure entre 0,043 s et 0,13 s : c'est très inférieur aux 4 s annoncées, la notice est respectée.

PIÈGE

Laisser la capacité en microfarads : $170\ \mu\text{F} = 170 \times 10^{-6}$ F. Sans cette conversion, la durée est un million de fois trop grande.

COMPRENDRE

Pendant la décharge, $u_C = U_0\,\text{e}^{-t/\tau}$: à $t = 5\,\tau$ il reste $\text{e}^{-5} \approx 0{,}7\ \%$ de la tension initiale. Le choc est donc bref, environ un dixième de seconde.

À LA CALCULATRICE

