Refroidissement d'un fer à cheval

Bac 2022 Métropole Jour 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Déterminer la valeur de la masse m_{Fer} du fer à cheval.

Données utiles $V_{\text{Fer}} = 104\ \text{cm}^3$; $\rho_{\text{Fer}} = 7{,}87\ \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$

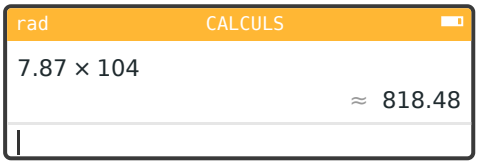
La masse volumique s'écrit $\rho_{\text{Fer}} = \dfrac{m_{\text{Fer}}}{V_{\text{Fer}}}$, donc $m_{\text{Fer}} = \rho_{\text{Fer}} \times V_{\text{Fer}}$.

$m_{\text{Fer}} = 7{,}87 \times 104 = 818\ \text{g}$

$\boxed{m_{\text{Fer}} = 818\ \text{g} = 0{,}818\ \text{kg}}$

COMPRENDRE
Les deux données ont trois chiffres significatifs : le résultat en garde trois. Les unités sont cohérentes telles quelles ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ et cm^3), aucune conversion n'est nécessaire pour obtenir des grammes.

À LA CALCULATRICE



Q2 Calculer la variation d'énergie interne ΔU du fer à cheval lors du chauffage.

Données utiles $m_{\text{Fer}} = 0{,}818\ \text{kg}$ (Q1) ; $c_{\text{Fer}} = 440\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\theta_{\text{Ext}} = 15\ ^\circ\text{C}$; $\theta_0 = 900\ ^\circ\text{C}$

Le fer à cheval est un système incompressible, sans changement d'état :

$$\Delta U = m_{\text{Fer}} \times c_{\text{Fer}} \times (\theta_0 - \theta_{\text{Ext}})$$

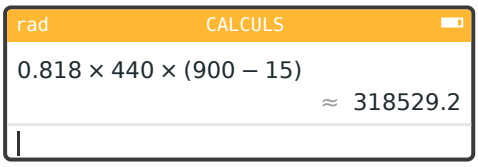
$\Delta U = 0{,}818 \times 440 \times (900 - 15) = 3{,}19 \times 10^5\ \text{J}$

$\boxed{\Delta U = 3{,}19 \times 10^5\ \text{J} = 319\ \text{kJ}}$

PIÈGE
Laisser la masse en grammes alors que c_{Fer} est donnée par kilogramme : le résultat serait mille fois trop grand.

COMPRENDRE
Un écart de température a la même valeur en °C et en K : $900 - 15 = 885\ ^\circ\text{C} = 885\ \text{K}$. Inutile de convertir chaque température en kelvins.

À LA CALCULATRICE



Q3 Interpréter au niveau microscopique la variation d'énergie interne ΔU du fer à cheval.

$\Delta U > 0$: l'énergie interne du fer augmente. Sa température s'élève, ce qui traduit une agitation thermique plus forte des atomes de fer : ils vibrent davantage autour de leur position dans le solide.

L'augmentation de U correspond à l'augmentation de l'énergie cinétique microscopique des atomes de fer.

COMPRENDRE
L'énergie interne regroupe les énergies cinétiques et potentielles d'interaction microscopiques. Sans changement d'état, c'est le terme d'agitation qui explique l'essentiel de la variation.

Q4 Appliquer le premier principe au fer à cheval entre t et $t+\Delta t$, puis en déduire l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\theta}{\tau}=\dfrac{\theta_{\text{Ext}}}{\tau}$ avec $\tau=\dfrac{m_{\text{Fer}}\,c_{\text{Fer}}}{h_{\text{air}}\,S}$.

Données utiles loi de Newton : $\Phi=h_{\text{air}}\,S\,(\theta_{\text{Ext}}-\theta)$

Système {fer à cheval}, incompressible, au repos macroscopique. Premier principe entre t et $t+\Delta t$: $\Delta U=W+Q$. On néglige le travail reçu (celui du marteau compris) : $W=0$, donc $\Delta U=Q$.

Variation d'énergie interne : $\Delta U=m_{\text{Fer}}\,c_{\text{Fer}}\,\big(\theta(t+\Delta t)-\theta(t)\big)$.

Transfert thermique reçu pendant Δt, durée assez courte pour que Φ reste constant : $Q=\Phi\,\Delta t=h_{\text{air}}\,S\,\big(\theta_{\text{Ext}}-\theta(t)\big)\,\Delta t$.

En égalant puis en divisant par $m_{\text{Fer}}\,c_{\text{Fer}}\,\Delta t$:

$$\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}=\frac{h_{\text{air}}\,S}{m_{\text{Fer}}\,c_{\text{Fer}}}\,\big(\theta_{\text{Ext}}-\theta(t)\big)$$

Quand Δt tend vers 0, le membre de gauche tend vers $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. En posant $\tau=\dfrac{m_{\text{Fer}}\,c_{\text{Fer}}}{h_{\text{air}}\,S}$: $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\theta_{\text{Ext}}-\theta}{\tau}$.

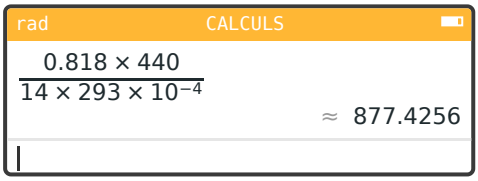
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{\theta}{\tau}=\frac{\theta_{\text{Ext}}}{\tau}\ \text{avec}\ \tau=\frac{m_{\text{Fer}}\,c_{\text{Fer}}}{h_{\text{air}}\,S}}$$

PIÈGE
Le flux est celui reçu par le fer : $(\theta_{\text{Ext}}-\theta)$ est négatif ici, le fer cède de l'énergie. Inverser les deux températures change le signe de l'équation.

COMPRENDRE
Vérification de la valeur annoncée : avec $S=293\times10^{-4}\ \text{m}^2$, on trouve $\tau=877\ \text{s}$, soit environ $880\ \text{s}$.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : 1) système et premier principe ; 2) $\Delta U=m\,c\,\Delta\theta$; 3) $Q=\Phi\,\Delta t$ avec la loi de Newton ; 4) division par Δt et passage à la limite.

À LA CALCULATRICE



Q5 Vérifier que $\theta(t)=(\theta_0-\theta_{\text{Ext}})\,e^{-t/\tau}+\theta_{\text{Ext}}$ est bien solution de l'équation différentielle.

On dérive la fonction proposée (θ_{Ext} est une constante) :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\tau}\,(\theta_0-\theta_{\text{Ext}})\,e^{-t/\tau}$$

On calcule le membre de gauche de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{\theta}{\tau}=-\frac{\theta_0-\theta_{\text{Ext}}}{\tau}\,e^{-t/\tau}+\frac{\theta_0-\theta_{\text{Ext}}}{\tau}\,e^{-t/\tau}+\frac{\theta_{\text{Ext}}}{\tau}$$

Les deux termes exponentiels s'annulent, quel que soit t. De plus $\theta(0)=\theta_0-\theta_{\text{Ext}}+\theta_{\text{Ext}}=\theta_0$: la condition initiale est respectée.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{\theta}{\tau}=\frac{\theta_{\text{Ext}}}{\tau}\ :\ \text{la fonction proposée est bien solution.}}$$

PIÈGE
Oublier le facteur $-\dfrac{1}{\tau}$ en dérivant $e^{-t/\tau}$: les exponentielles ne se simplifient alors plus.

MÉTHODE
« Vérifier » ne demande pas de résoudre : on dérive, on remplace dans un seul membre et on retrouve l'autre.

Q6 Calculer la température du fer au moment où le maréchal-ferrant le pose sur la face inférieure du sabot. Commenter.

Données utiles $\theta_0 = 900\ ^\circ\text{C}$; $\theta_{\text{Ext}} = 15\ ^\circ\text{C}$; $\tau = 880\ \text{s}$; une minute de martelage puis une minute d'installation

Le fer est posé sur le sabot environ deux minutes après sa sortie de la forge : $t = 2 \times 60 = 120\ \text{s}$.

$$\theta(120) = (900 - 15) \times e^{-120/880} + 15 = 787\ ^\circ\text{C}$$

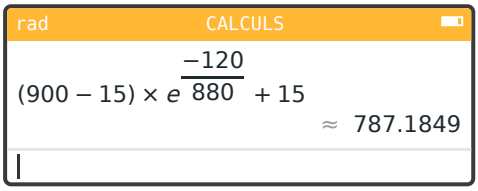
Le fer a perdu à peine plus de 100 °C : il est encore très chaud, ce qui explique qu'il brûle la corne et y laisse une trace.

$\theta(120\ \text{s}) = 787\ ^\circ\text{C}$, soit environ $790\ ^\circ\text{C}$: le fer est encore très chaud.

PIÈGE
Garder $t = 2$ en minutes alors que τ est en secondes, ou oublier d'ajouter θ_{Ext} après l'exponentielle.

COMPRENDRE
$120\ \text{s}$ est très inférieur à $\tau = 880\ \text{s}$: le refroidissement à l'air est à peine entamé. Il faudrait environ 5τ, plus d'une heure, pour revenir à la température ambiante.

À LA CALCULATRICE



Q7 En adaptant la solution précédente, estimer la durée nécessaire pour que le fer, plongé à 600 °C dans l'eau à 15 °C, soit refroidi à $\theta_{\text{finale}} = 40\ ^\circ\text{C}$.

Données utiles $m_{\text{Fer}} = 0{,}818\ \text{kg}$ (Q1) ; $c_{\text{Fer}} = 440\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $h_{\text{eau}} = 360\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$; $S = 293\ \text{cm}^2$; $\theta_{\text{Ext}} = 15\ ^\circ\text{C}$

Dans l'eau, le modèle reste le même en remplaçant h_{air} par h_{eau} et en prenant pour température initiale $\theta'_0 = 600\ ^\circ\text{C}$:

$$\theta(t) = (\theta'_0 - \theta_{\text{Ext}})\, e^{-t/\tau_{\text{eau}}} + \theta_{\text{Ext}} \quad \text{avec} \quad \tau_{\text{eau}} = \frac{m_{\text{Fer}}\, c_{\text{Fer}}}{h_{\text{eau}}\, S}$$

Avec $S = 293 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$: $\tau_{\text{eau}} = \dfrac{0{,}818 \times 440}{360 \times 293 \times 10^{-4}} = 34{,}1\ \text{s}$.

On cherche t_f tel que $\theta(t_f) = \theta_{\text{finale}}$:

$$e^{-t_f/\tau_{\text{eau}}} = \frac{\theta_{\text{finale}} - \theta_{\text{Ext}}}{\theta'_0 - \theta_{\text{Ext}}} \quad \text{donc} \quad t_f = -\tau_{\text{eau}} \times \ln\left(\frac{\theta_{\text{finale}} - \theta_{\text{Ext}}}{\theta'_0 - \theta_{\text{Ext}}}\right)$$

$$t_f = -34{,}1 \times \ln\left(\frac{40 - 15}{600 - 15}\right) = 108\ \text{s}$$

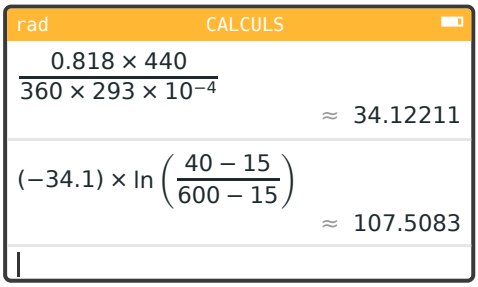
$t_f \approx 108\ \text{s}$, soit un peu moins de deux minutes.

PIÈGE
Laisser S en cm^2 alors que h_{eau} est en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$: $1\ \text{cm}^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2$. Autre erreur : garder $\theta_0 = 900\ ^\circ\text{C}$.

COMPRENDRE
Raccourci possible : τ est inversement proportionnel à h, donc $\tau_{\text{eau}} = 880 \times \dfrac{14}{360} \approx 34\ \text{s}$. L'eau refroidit le fer environ 26 fois plus vite que l'air.

MÉTHODE
Pour extraire t d'une exponentielle : isoler $e^{-t/\tau}$, puis prendre le logarithme népérien des deux membres. Le rapport est inférieur à 1, son logarithme est négatif, donc t_f est bien positif.

À LA CALCULATRICE



Q8 Dans la réalité, 20 secondes suffisent pour refroidir le fer dans de l'eau à 15 °C. Commenter.

Données utiles $t_f \approx 108$ s et $\tau_{\text{eau}} = 34{,}1$ s (Q7)

La durée réelle est environ cinq fois plus courte que celle prévue. D'après le modèle, après 20 s le fer serait encore à $(600-15)\times e^{-20/34{,}1}+15 \approx 340$ °C.

Le modèle sous-estime donc l'énergie cédée par le fer à l'eau. Au contact du fer très chaud, l'eau se vaporise : ce changement d'état absorbe beaucoup d'énergie et l'ébullition brasse l'eau. Le coefficient h_{eau}, supposé constant, est en réalité bien plus grand tant que le fer est très chaud. Le fer cède aussi de l'énergie par rayonnement.

Le modèle de Newton avec h_{eau} constant n'est pas adapté au début de la trempe : le refroidissement réel est environ 5 fois plus rapide.

COMPRENDRE

Un modèle se juge en confrontant sa prévision à la mesure. Quand l'écart est grand, on cherche l'hypothèse en défaut : ici la valeur constante de h_{eau}, établie pour de l'eau froide qui reste liquide.

À LA CALCULATRICE

