La physique du jonglage

Bac 2022 Métropole Jour 1 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Décrire qualitativement, selon l'axe Oy, le mouvement de la balle lors de la phase 1 à l'aide des figures 2a et 2b.

Figure 2a : y augmente jusqu'à un maximum voisin de $0{,}8$ m, atteint vers $t = 0{,}4$ s, puis diminue jusqu'à 0 : la balle monte, puis redescend.

Figure 2b : v_y est positive et décroît jusqu'à s'annuler vers $t = 0{,}4$ s (la balle ralentit en montant), puis devient négative et sa valeur absolue augmente (la balle accélère en descendant).

Phase 1 : montée ralentie jusqu'au sommet ($v_y = 0$), puis descente accélérée.

COMPRENDRE
Le signe de v_y indique le sens du mouvement sur l'axe vertical ; sa valeur absolue indique si la balle va plus ou moins vite. Au sommet, v_y change de signe.

Q2 Interpréter la figure 2a pour décrire le rôle de la main sur le mouvement de la balle lors de la phase 2.

Pendant la phase 2, y est négatif : la balle se trouve sous le niveau de lancer, elle est dans la main.

De $t \approx 0{,}75$ s à $t \approx 0{,}95$ s, y diminue jusqu'à environ $-0{,}35$ m : la main accompagne la balle dans sa descente et l'arrête.

De $t \approx 0{,}95$ s à $t \approx 1{,}1$ s, y remonte jusqu'à 0 : la main pousse la balle vers le haut.

La main amortit la balle, puis la relance : elle la lâche de nouveau en $y = 0$ vers $t = 1{,}1$ s.

PIÈGE
La question porte sur la figure 2a : il faut s'appuyer sur les variations de y, pas seulement sur celles de v_y.

Q3 Justifier, avec la deuxième loi de Newton et le modèle de la chute libre, que v_x est constante et égale à v_{0x} quand la balle a quitté la main.

Système {balle}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen. En chute libre, la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, dirigé vers le bas : $a_x = 0$ et $a_y = -g$.

Comme $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$, la composante v_x ne dépend pas du temps. À $t = 0$, elle vaut v_{0x}.

$v_x(t) = v_{0x}$ pendant toute la chute libre.

MÉTHODE
Toujours dans cet ordre : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection sur les axes, primitive, puis constante fixée par la condition initiale.

Q4 Exprimer l'énergie mécanique initiale E_{m0} de la balle en fonction de m, v_{0x} et v_{0y}.

$$E_{m0} = E_{c0} + E_{pp0} = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,y_0$$

À $t = 0$, la balle est en $y_0 = 0$, niveau de référence : $E_{pp0} = 0$. De plus $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$.

$$E_{m0} = \frac{1}{2}\,m\,\left(v_{0x}^2 + v_{0y}^2\right)$$

PIÈGE
Écrire $v_0 = v_{0x} + v_{0y}$: ce sont les carrés des composantes qui s'ajoutent (théorème de Pythagore).

Q5 Par un raisonnement énergétique appliqué à la phase 1, établir que l'altitude maximale vaut $H = \dfrac{v_{0y}^2}{2g}$.

En chute libre, seul le poids agit et il est conservatif : l'énergie mécanique se conserve.

Au sommet S : $y = H$, $v_y = 0$ et $v_x = v_{0x}$ (Q3), donc $E_{mS} = \dfrac{1}{2} m v_{0x}^2 + m g H$.

$E_{m0} = E_{mS}$ s'écrit, avec Q4 :

$$\frac{1}{2} m v_{0x}^2 + \frac{1}{2} m v_{0y}^2 = \frac{1}{2} m v_{0x}^2 + m g H$$

d'où $\dfrac{1}{2} v_{0y}^2 = g H$.

$$\boxed{H = \frac{v_{0y}^2}{2g}}$$

PIÈGE
Au sommet, la vitesse n'est pas nulle : seule v_y s'annule. L'énergie cinétique y vaut $\dfrac{1}{2} m v_{0x}^2$; l'oublier donne une formule fausse avec v_0.

Q6 Déterminer H avec la relation précédente et une lecture de v_{0y} sur la figure 2b. Comparer à la lecture graphique de la figure 2a.

Données utiles $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Figure 2b, à $t = 0$: $v_{0y} = 4{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

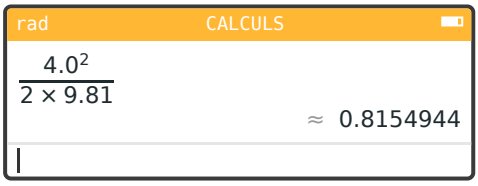
$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{4{,}0^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}82\ \text{m}$$

Figure 2a : le maximum de y se lit à environ $0{,}81$ m.

$H = 0{,}82$ m par le calcul, environ $0{,}81$ m par lecture : les deux valeurs concordent.

COMPRENDRE
Une lecture graphique donne ici deux chiffres significatifs : le résultat du calcul n'en garde pas plus, même si g en a trois.

À LA CALCULATRICE



Q7 Établir l'expression littérale de la coordonnée $v_y(t)$ du vecteur vitesse lors de la phase 1.

D'après Q3, $a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g$.

Par primitive : $v_y(t) = -g t + C$, avec C une constante.

Condition initiale : $v_y(0) = v_{0y}$, donc $C = v_{0y}$.

$$\boxed{v_y(t) = -g t + v_{0y}}$$

COMPRENDRE
C'est une fonction affine décroissante du temps : sa représentation est une droite, ce que montre la figure 2b pendant la phase 1.

Q8 Évaluer l'intensité de la pesanteur g à l'aide de la figure 2b lors de la phase 1. Commenter.

Données utiles $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

D'après Q7, la droite $v_y(t)$ de la phase 1 a pour coefficient directeur $-g$.

Deux points lus sur cette droite : $(0\ \text{s}\ ;\ 4{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ et $(0{,}75\ \text{s}\ ;\ -3{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})$.

$$-g = \frac{-3{,}6 - 4{,}0}{0{,}75 - 0} = -10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

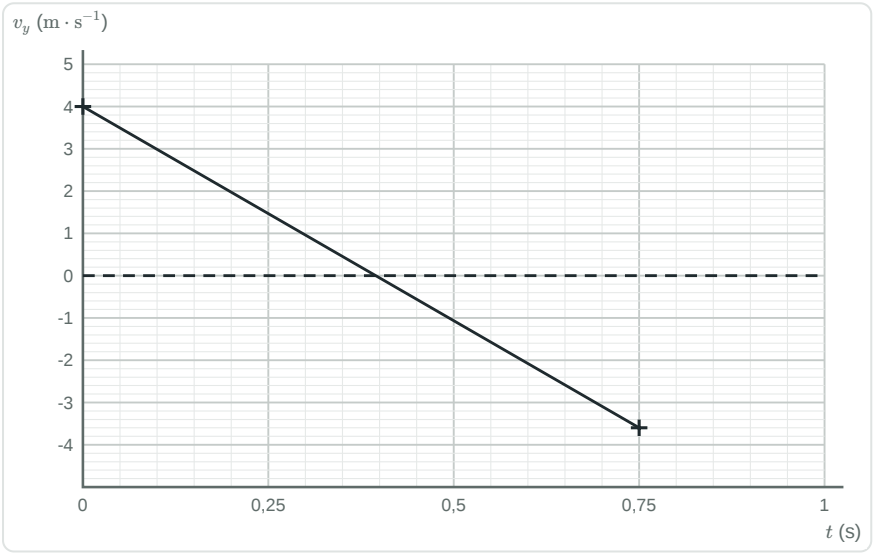
Écart relatif avec la valeur de référence : $\dfrac{10{,}1 - 9{,}81}{9{,}81} \approx 3\ \%$.

$g \approx 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, proche de $9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (écart de 3 % environ) : le modèle de la chute libre convient.

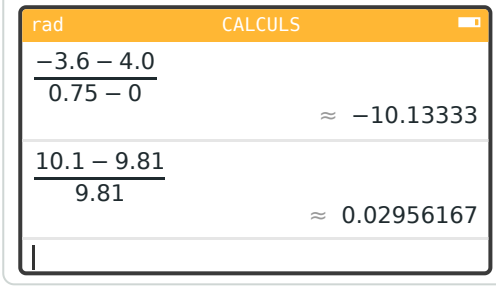
PIÈGE
Donner une pente négative pour g : la pente vaut $-g$, et g est une grandeur positive.

MÉTHODE
Pour un coefficient directeur, choisir deux points de la droite les plus éloignés possible : l'incertitude de lecture pèse alors moins sur le résultat.

À LA CALCULATRICE



Q8 · Figure 2b pendant la phase 1 : les deux points choisis et la droite de pente $-g$



Q9 Déterminer l'équation horaire $y(t)$ du mouvement du centre de la balle lors de la phase 1.

$v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -g\,t + v_{0y}$ (Q7).

Par primitive : $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0y}\,t + C'$.

Condition initiale : $y(0) = 0$ (la balle part de l'origine), donc $C' = 0$.

$$y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0y}\,t$$

Q10 Établir l'expression de la durée t_{air} passée en l'air en fonction de v_{0y} et de g, puis en déduire que $t_{air} = \sqrt{\dfrac{8H}{g}}$.

La balle est rattrapée en $y = 0$: t_{air} est la solution non nulle de $y(t) = 0$.

$-\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{0y}\,t = 0$ équivaut à $t\left(-\dfrac{1}{2}\,g\,t + v_{0y}\right) = 0$, soit $t = 0$ (lancer) ou $t = \dfrac{2\,v_{0y}}{g}$.

Donc $t_{air} = \dfrac{2\,v_{0y}}{g}$.

D'après Q5, $v_{0y}^2 = 2\,g\,H$, donc $v_{0y} = \sqrt{2\,g\,H}$ ($v_{0y} > 0$). Alors :

$$t_{air} = \frac{2\sqrt{2\,g\,H}}{g} = \sqrt{\frac{4 \times 2\,g\,H}{g^2}}$$

$$\boxed{t_{air} = \frac{2\,v_{0y}}{g} = \sqrt{\frac{8H}{g}}}$$

COMPRENDRE
La durée de vol est le double de la durée de montée $\dfrac{v_{0y}}{g}$: en chute libre, montée et descente sont symétriques.

MÉTHODE
Pour faire entrer un facteur positif sous une racine, on l'élève au carré : $\dfrac{2}{g} = \sqrt{\dfrac{4}{g^2}}$.

Q11 Calculer t_{air} avec la valeur de H lue sur la figure 2a. Commenter.

Données utiles $H \approx 0{,}81$ m (figure 2a, Q6) ; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

$$t_{air} = \sqrt{\frac{8H}{g}} = \sqrt{\frac{8 \times 0{,}81}{9{,}81}} = 0{,}81\ \text{s}$$

Sur la figure 2a, la phase 1 se termine vers $t \approx 0{,}76$ s : la durée calculée est un peu plus grande, d'environ 7 %.

L'écart reste faible. Il vient de l'imprécision des lectures graphiques et du modèle : à la fin de la phase 1, $|v_y| \approx 3{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ est inférieure à v_{0y} , la main reprend donc la balle un peu avant la date prévue.

$t_{air} = 0{,}81$ s, du même ordre que la durée lue ($\approx 0{,}76$ s) : le modèle de la chute libre décrit correctement la phase 1.

COMPRENDRE
Dans le modèle, la balle revient en $y = 0$ avec $v_y = -v_{0y}$, soit $-4{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. La figure 2b s'arrête à $-3{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: la chute libre a duré un peu moins longtemps que prévu.

À LA CALCULATRICE

