Principe de l'accélérateur de Van de Graaff

Bac 2023 Polynésie Jour 2 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

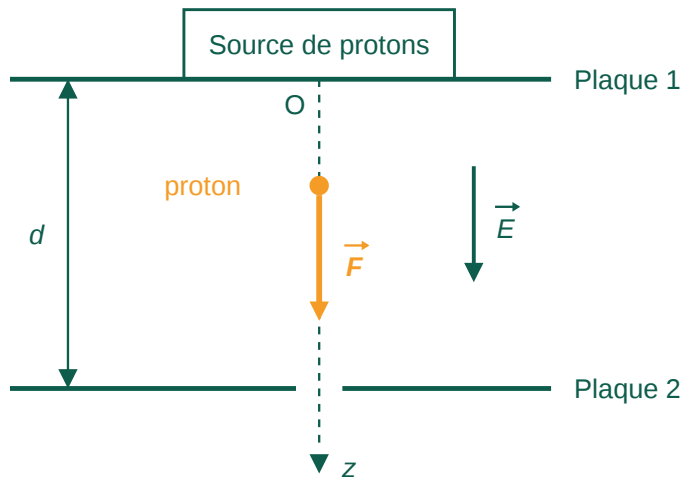
Q1 Reproduire le schéma du condensateur plan et représenter, sans souci d'échelle, la force électrostatique $\vec{F}$ exercée sur le proton en un point quelconque de sa trajectoire.

Le proton porte la charge $q = +e$, donc $\vec{F} = q\,\vec{E} = e\,\vec{E}$.

Comme $e > 0$, $\vec{F}$ a la même direction et le même sens que $\vec{E}$: perpendiculaire aux plaques, de la plaque 1 vers la plaque 2. Son point d'application est le proton (voir schéma).

$\vec{F} = e\,\vec{E}$: force verticale, dirigée vers la plaque 2, appliquée au proton.

PIÈGE
Tracer la flèche à côté de la trajectoire ou à partir d'une plaque. Le vecteur force part du proton, placé sur l'axe (Oz) entre les deux plaques.



Q1 · Condensateur plan : la force électrostatique a la direction et le sens du champ

Q2 Vérifier que le poids $\vec{P}$ du proton est négligeable devant la force électrostatique $\vec{F}$, en calculant les valeurs P et F.

Données utiles $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $E = 1{,}5 \times 10^{6}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

Poids : $P = m_p\,g = 1{,}67 \times 10^{-27} \times 9{,}81 = 1{,}64 \times 10^{-26}$ N

Force électrostatique : $F = e\,E = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1{,}5 \times 10^{6} = 2{,}4 \times 10^{-13}$ N

Rapport : $\dfrac{F}{P} = \dfrac{2{,}4 \times 10^{-13}}{1{,}64 \times 10^{-26}} = 1{,}5 \times 10^{13}$

$F \approx 1{,}5 \times 10^{13}\,P$: le poids est négligeable devant la force électrostatique.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : P en garde trois, comme m_p et g ; F n'en garde que deux, comme e et E. Le résultat suit la donnée la moins précise.

MÉTHODE
Pour comparer deux grandeurs de même nature, calculer leur rapport : au-delà d'un facteur 100 environ, la plus petite est négligeable. Une simple différence ne permet pas de conclure.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1.67 \times 10^{-27} \times 9.81 \approx 1.63827 \times 10^{-26}$

$1.6 \times 10^{-19} \times 1.5 \times 10^{6} \approx 2.4 \times 10^{-13}$

$\dfrac{2.4 \times 10^{-13}}{1.64 \times 10^{-26}} \approx 1.463415 \times 10^{13}$

Q3 En appliquant la deuxième loi de Newton, établir l'expression littérale du vecteur accélération $\vec{a}$ du proton.

Système {proton}, de masse m_p constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : la force électrostatique $\vec{F} = e\,\vec{E}$ (poids négligé).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_p\,\vec{a}$, soit $e\,\vec{E} = m_p\,\vec{a}$.

$\vec{a} = \dfrac{e}{m_p}\,\vec{E}$, soit $\vec{a} = \dfrac{e\,E}{m_p}\,\vec{k}$ puisque $\vec{E} = E\,\vec{k}$.

PIÈGE

Donner seulement la valeur $a = \dfrac{eE}{m_p}$. La question porte sur un vecteur : la réponse est une égalité vectorielle, précédée du système et du référentiel.

Q4 Montrer que, dans le repère (O, z), la coordonnée du vecteur vitesse du proton est $v_z(t) = \dfrac{e \times E}{m_p} \times t$.

D'après Q3, la coordonnée de l'accélération sur l'axe (Oz) est constante : $a_z = \dfrac{e\,E}{m_p}$.

Or $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$. Par intégration : $v_z(t) = \dfrac{e\,E}{m_p}\,t + C_1$, où C_1 est une constante.

Condition initiale : le proton est libéré sans vitesse, $v_z(0) = 0$, donc $C_1 = 0$.

$v_z(t) = \dfrac{e\,E}{m_p}\,t$, expression attendue.

MÉTHODE

Passer de l'accélération à la vitesse : 1) écrire $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$; 2) chercher une primitive, avec sa constante ; 3) fixer la constante par la condition initiale, citée explicitement.

Q5 Déterminer la valeur de la vitesse v_2 du proton au niveau de la plaque 2, à la sortie du premier condensateur, et vérifier qu'elle est insuffisante pour analyser un objet d'art.

Données utiles $d = 2{,}9 \times 10^{-2}$ m ; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $E = 1{,}5 \times 10^{6}$ V · m^{-1} ; $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; vitesse utile : entre $2{,}3 \times 10^{7}$ et $3{,}1 \times 10^{7}$ m · s^{-1}

Position : $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, donc $z(t) = \dfrac{e\,E}{2\,m_p}\,t^2 + C_2$. Le proton part de O : $z(0) = 0$, donc $C_2 = 0$.

Le proton atteint la plaque 2 à la date t_2 telle que $z(t_2) = d$: $\quad t_2 = \sqrt{\dfrac{2\,m_p\,d}{e\,E}}$

En reportant dans $v_z(t)$: $\quad v_2 = \dfrac{e\,E}{m_p}\sqrt{\dfrac{2\,m_p\,d}{e\,E}} = \sqrt{\dfrac{2\,e\,E\,d}{m_p}}$

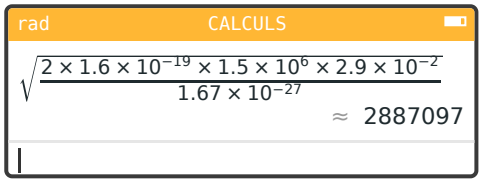
$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1{,}5 \times 10^{6} \times 2{,}9 \times 10^{-2}}{1{,}67 \times 10^{-27}}} = 2{,}9 \times 10^{6}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v_2 = 2{,}9 \times 10^{6}$ m · s^{-1} $< 2{,}3 \times 10^{7}$ m · s^{-1} : vitesse insuffisante pour analyser un objet d'art.

PIÈGE
Comparer sans regarder les puissances de dix : $2{,}9 \times 10^{6}$ est huit fois plus petit que $2{,}3 \times 10^{7}$, même si 2,9 est compris entre 2,3 et 3,1.

MÉTHODE
Autre démarche, plus courte : le théorème de l'énergie cinétique entre les plaques 1 et 2, avec $U = E \times d$, donne $\frac{1}{2}\,m_p\,v_2^2 = e\,E\,d$ et la même expression de v_2.

À LA CALCULATRICE



Q6 Donner un argument montrant que l'expression de la coordonnée $v_z(t)$ du vecteur vitesse dans le deuxième condensateur est la même qu'à la question 4.

Dans le deuxième condensateur, le proton est soumis au même champ uniforme $\vec{E}$: il subit la même force $\vec{F} = e\,\vec{E}$ et garde la même accélération $a_z = \dfrac{e\,E}{m_p}$.

L'origine des dates est conservée et la vitesse ne subit aucune discontinuité au passage de la plaque 2 : le mouvement uniformément accéléré commencé en O se prolonge sans changement.

Même accélération et même origine des dates : $v_z(t) = \dfrac{e\,E}{m_p}\,t$ reste valable.

COMPRENDRE
Pour le proton, deux condensateurs identiques à la suite équivalent à un seul condensateur de longueur $2d$: rien ne distingue le passage de la plaque 2.

Q7 Montrer, en appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre la première et la dernière plaque, que l'énergie cinétique finale s'écrit $E_c(\text{final}) = e \times U$.

Théorème de l'énergie cinétique appliqué au proton entre la première plaque et la dernière : la variation d'énergie cinétique est égale au travail de la seule force prise en compte, $\vec{F}$.

$$E_c(\text{final}) - E_c(\text{initial}) = W(\vec{F}) = q\,U$$

Le proton est libéré sans vitesse : $E_c(\text{initial}) = 0$. Sa charge est $q = e$.

$E_c(\text{final}) = e \times U$, expression attendue.

COMPRENDRE
L'énergie acquise ne dépend que de la tension totale U, pas du nombre de condensateurs ni de la durée du trajet. C'est l'intérêt du théorème : aucune équation horaire à écrire.

Q8 Calculer la valeur de la vitesse v_f du proton au niveau de la dernière plaque, à la sortie de l'accélérateur, et déterminer si ce proton permet l'analyse d'un objet d'art.

Données utiles $U = 3{,}0\,\text{MV} = 3{,}0 \times 10^{6}$ V ; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; vitesse utile : entre $2{,}3 \times 10^{7}$ et $3{,}1 \times 10^{7}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

D'après Q7 : $\frac{1}{2} m_p v_f^2 = e\,U$, donc $v_f = \sqrt{\frac{2\,e\,U}{m_p}}$.

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 3{,}0 \times 10^{6}}{1{,}67 \times 10^{-27}}} = 2{,}4 \times 10^{7}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$2{,}3 \times 10^{7}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} < v_f < 3{,}1 \times 10^{7}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_f = 2{,}4 \times 10^{7}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$: la vitesse est dans l'intervalle utile, ce proton permet l'analyse d'un objet d'art.

PIÈGE
Laisser la tension en mégavolts : il faut $U = 3{,}0 \times 10^{6}$ V. Ne pas multiplier non plus U par 69 : les 3,0 MV sont déjà la tension entre la première et la dernière plaque.

COMPRENDRE
Vérification de cohérence : $69 \times E \times d = 3{,}0 \times 10^{6}$ V, c'est bien la tension annoncée.

À LA CALCULATRICE

