Microphone électrostatique

Bac 2023 Polynésie Jour 2 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 À l'aide de la loi des mailles, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ lors de la charge du condensateur.

Loi des mailles, interrupteur fermé : $E = u_R(t) + u_C(t)$.

Loi d'Ohm : $u_R(t) = R\,i(t)$.

Pour le condensateur : $i(t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ avec $q(t) = C\,u_C(t)$ et C constante, donc $i(t) = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

On remplace : $E = RC\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C(t)$, puis on divise par RC :

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$$

PIÈGE

Écrire directement $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ sans passer par $q = C\,u_C$ peut coûter un point quand l'énoncé demande de « montrer ».

MÉTHODE

Toujours trois étapes : loi des mailles, loi d'Ohm, relation $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. On termine en mettant l'équation sous la forme demandée par l'énoncé.

Q2 Vérifier que $u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ est solution de l'équation différentielle ; préciser l'expression et l'unité de τ.

On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau}\,e^{-t/\tau}$.

On reporte dans le membre de gauche de l'équation :

$$\frac{E}{\tau}\,e^{-t/\tau} + \frac{E}{RC}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{E}{RC} + E\,e^{-t/\tau}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}\right)$$

Ce membre est égal à $\dfrac{E}{RC}$ à chaque instant si $\dfrac{1}{\tau} - \dfrac{1}{RC} = 0$, c'est-à-dire si $\tau = RC$.

De plus $u_C(0) = E\,(1 - 1) = 0$: le condensateur est bien déchargé à $t = 0$.

Unité : dans l'équation, $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ est en $\mathrm{V \cdot s^{-1}}$; $\dfrac{u_C}{RC}$ doit avoir la même unité, avec u_C en volts, donc RC est en secondes.

La fonction est solution avec $\tau = RC$, exprimée en secondes (s).

PIÈGE

Oublier le facteur $-\dfrac{1}{\tau}$ en dérivant l'exponentielle : la dérivée de $e^{-t/\tau}$ est $-\dfrac{1}{\tau}\,e^{-t/\tau}$, et le signe « $-$ » devant l'exponentielle rend le résultat positif.

COMPRENDRE

« Vérifier » ne demande pas de résoudre l'équation : on injecte la fonction donnée et on cherche à quelle condition l'égalité est vraie pour tout t.

Q3 Déterminer le temps caractéristique τ à l'aide de la figure 3, en expliquant la démarche.

Données utiles $E = 200$ V ; figure 3

À la date $t = \tau$: $u_C(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) = 0{,}63\,E$.

Sur la figure 3, la tension tend vers $E = 200$ V, donc $u_C(\tau) = 0{,}63 \times 200 = 126$ V.

On trace l'horizontale d'ordonnée 126 V jusqu'à la courbe, puis on lit l'abscisse du point d'intersection.

$\tau \approx 1{,}5$ µs

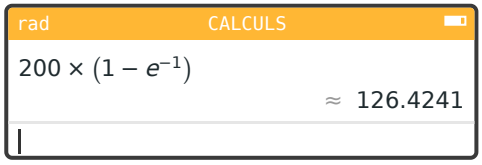
PIÈGE

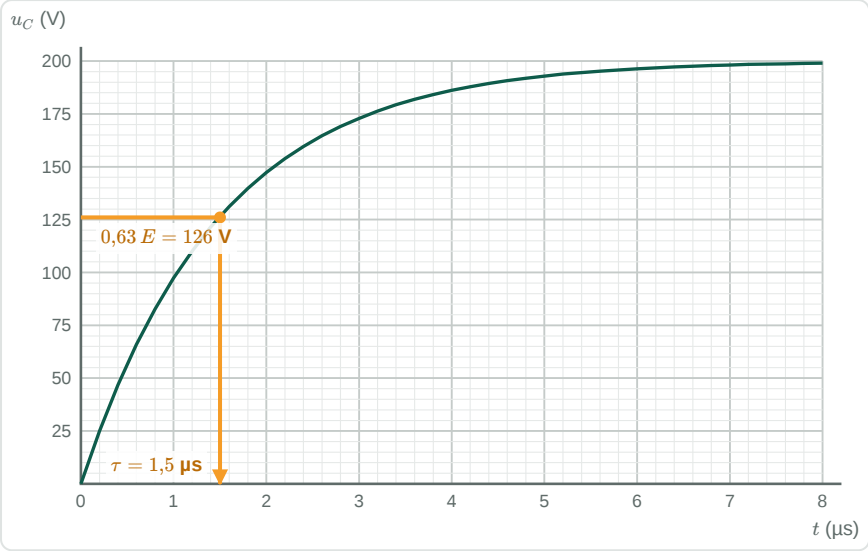
Lire la date à laquelle la courbe atteint 200 V (environ $5\,\tau$) : ce n'est pas τ. L'abscisse est en microsecondes.

MÉTHODE

Autre démarche possible : la tangente à la courbe à l'origine coupe l'asymptote $u_C = E$ à la date $t = \tau$. Elle est moins précise car la tangente se trace à l'œil.

À LA CALCULATRICE





Q3 · Figure 3 du sujet, avec la lecture de τ à 63 % de E

Q4 En déduire la capacité C du condensateur.

Données utiles $R = 1{,}0 \times 10^5\ \Omega$; $\tau = 1{,}5\ \mu s$ (Q3)

$\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$.

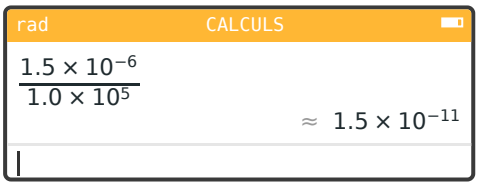
$$C = \frac{1{,}5 \times 10^{-6}}{1{,}0 \times 10^{5}} = 1{,}5 \times 10^{-11}\ \text{F}$$

$C = 1{,}5 \times 10^{-11}\ \text{F} = 15\ \text{pF}$

PIÈGE
Laisser τ en microsecondes : il faut $1{,}5 \times 10^{-6}$ s pour obtenir des farads.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme R et comme la lecture graphique de τ. Le résultat ne peut pas être plus précis que la donnée la moins précise.

À LA CALCULATRICE



Q5 Calculer la capacité C_0 du condensateur modélisant le microphone au repos.

Données utiles $S = 3{,}60 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$; $e = 20{,}77\ \mu\text{m}$; $\varepsilon_{\text{air}} = 8{,}9 \times 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$

$C_0 = \varepsilon_{\text{air}} \times \dfrac{S}{e}$ avec $e = 20{,}77 \times 10^{-6}$ m.

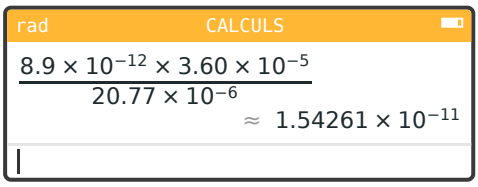
$$C_0 = 8{,}9 \times 10^{-12} \times \frac{3{,}60 \times 10^{-5}}{20{,}77 \times 10^{-6}} = 1{,}5 \times 10^{-11}\ \text{F}$$

$C_0 = 1{,}5 \times 10^{-11}\ \text{F} = 15\ \text{pF}$, en accord avec la valeur de Q4.

PIÈGE
Garder quatre chiffres parce que e en a quatre : ε_{air} n'en a que deux, le résultat aussi.

COMPRENDRE
Le texte du sujet annonce une permittivité en « farads par mètre carré », mais la donnée est bien en $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$: c'est cette unité qui donne des farads dans $\varepsilon_{\text{air}} \times S/e$.

À LA CALCULATRICE



Q6 Identifier le paramètre géométrique responsable de la variation de capacité. En déduire si C augmente ou diminue lors d'une surpression.

La membrane est mobile : sous l'effet de l'onde sonore, c'est la distance e entre les armatures qui varie (S et ε_{air} restent constantes).

Lors d'une surpression, la membrane est poussée vers la plaque fixe : e diminue.

Comme $C = \varepsilon_{\text{air}} \times \dfrac{S}{e}$, la capacité est inversement proportionnelle à e.

Le paramètre est la distance e ; lors d'une surpression e diminue, donc C augmente.

COMPRENDRE
La membrane vibre au rythme du son : e, donc C, oscillent autour de leur valeur de repos. C'est cette variation de capacité qui traduit le son en signal électrique.

Q7 Calculer la période T du son. Commenter la possibilité d'acquérir fidèlement le son en comparant T au temps de réponse du capteur.

Données utiles $f = 440$ Hz ; temps de réponse de l'ordre de 1 µs

$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{440} = 2{,}27 \times 10^{-3}$ s, soit $2{,}27 \times 10^{3}$ µs.

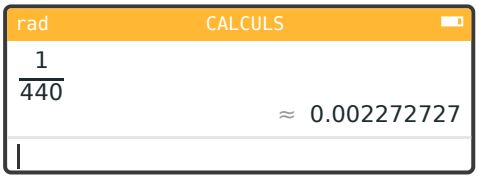
La période est environ 2000 fois plus grande que le temps de réponse du capteur : le capteur réagit bien plus vite que le signal ne varie.

$T = 2{,}27 \times 10^{-3}$ s $\gg 1$ µs : le son peut être acquis fidèlement.

COMPRENDRE
Le temps de réponse est du même ordre que $\tau = 1{,}5$ µs (Q3) : c'est le circuit RC qui fixe la rapidité du capteur.

MÉTHODE
Pour comparer deux durées, on les exprime dans la même unité et on donne leur rapport ; un simple « plus grand » ne suffit pas.

À LA CALCULATRICE



Q8 Vérifier si le niveau d'intensité sonore L du son peut être mesuré par le microphone étudié.

Données utiles $I = 4{,}7 \times 10^{-6}$ W · m^{-2} ; $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}$ W · m^{-2} ; domaine d'utilisation : de 32 dB à 160 dB

$$L = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \times \log\left(\frac{4{,}7 \times 10^{-6}}{1{,}0 \times 10^{-12}}\right) = 67 \text{ dB}$$

$32 \text{ dB} < 67 \text{ dB} < 160 \text{ dB}$: le niveau appartient au domaine d'utilisation.

$L = 67$ dB : ce son peut être mesuré par le microphone.

PIÈGE
Utiliser la touche ln au lieu de log : la formule emploie le logarithme décimal. Avec ln on trouverait 154 dB, valeur encore dans le domaine, donc l'erreur passe inaperçue.

À LA CALCULATRICE

