Tir à l'arc à la perche verticale

Bac 2023 Nouvelle-Calédonie Jour 2 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

A.1 Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_m(0)$ de la flèche à $t = 0$ en fonction de h, m, g et v_0.

$E_m = E_c + E_{pp}$, avec $E_{pp} = m\,g\,y$ puisque l'origine de l'énergie potentielle est au sol.

À $t = 0$, la flèche est à l'altitude h avec la vitesse v_0 :

$$E_m(0) = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,h$$

PIÈGE
Oublier le terme $m\,g\,h$: la flèche ne part pas du sol mais de la hauteur $h = 1{,}80$ m, où l'énergie potentielle n'est pas nulle.

A.2 Donner l'expression de l'énergie mécanique $E_m(t_H)$ de la flèche à $t = t_H$ en fonction de m, g et H.

Le tir est vertical : au sommet de la trajectoire, la vitesse de la flèche s'annule, donc $E_c(t_H) = 0$.

$$E_m(t_H) = m\,g\,H$$

COMPRENDRE
La vitesse est nulle au sommet seulement parce que le tir est vertical. Pour un tir incliné (partie B), il reste au sommet la composante horizontale de la vitesse.

A.3 En déduire que $H = h + \dfrac{v_0^2}{2g}$.

Les frottements sont négligés : la flèche n'est soumise qu'à son poids, force conservative. L'énergie mécanique se conserve :

$E_m(0) = E_m(t_H)$, soit $\dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,h = m\,g\,H$.

On divise par $m\,g$:

$$H = h + \frac{v_0^2}{2g}$$

MÉTHODE
Pour relier une vitesse et une altitude sans faire intervenir le temps : justifier la conservation de E_m (aucune force non conservative ne travaille), puis l'écrire entre deux instants bien choisis.

A.4.1 Calculer H en s'appuyant sur la question A.3.

Données utiles $h = 1{,}80$ m ; $v_0 = 25{,}0$ m · s^{-1} ; $g = 9{,}81$ m · s^{-2}

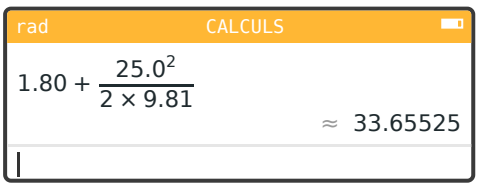
$$H = h + \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}80 + \frac{25{,}0^2}{2 \times 9{,}81}$$

$$H = 33{,}7 \text{ m}$$

PIÈGE
La masse de la flèche n'intervient pas : elle se simplifie dans la conservation de l'énergie. Inutile de la convertir en kilogrammes ici.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme les données. L'énoncé écrit g en m · s^{-1} : c'est une coquille, l'intensité de la pesanteur s'exprime en m · s^{-2} (ou en N · kg^{-1}).

À LA CALCULATRICE



A.4.2 Évaluer $u(H)$ sachant que $u(h) = 0{,}01$ m, puis donner un encadrement de la valeur de H.

Données utiles $u(H) = \sqrt{(u(h))^2 + \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 (u(v_0))^2}$; $u(v_0) = 0{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $H = 33{,}7$ m (A.4.1)

$$u(H) = \sqrt{0{,}01^2 + \left(\frac{25{,}0}{9{,}81}\right)^2 \times 0{,}5^2} = 1{,}27 \text{ m}$$

On arrondit par excès à deux chiffres significatifs : $u(H) = 1{,}3$ m, d'où $H = 33{,}7 \pm 1{,}3$ m.

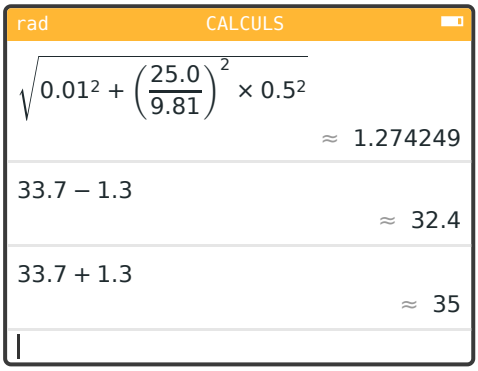
Encadrement : $H - u(H) \leqslant H \leqslant H + u(H)$

$u(H) = 1{,}3$ m et $32{,}4 \text{ m} \leqslant H \leqslant 35{,}0 \text{ m}$

COMPRENDRE
Une incertitude-type s'écrit avec un ou deux chiffres significatifs, arrondie par excès. Avec un seul chiffre, $u(H) = 2$ m et $32 \text{ m} \leqslant H \leqslant 36 \text{ m}$: cette réponse est acceptée aussi.

MÉTHODE
Le résultat se donne avec la même précision que son incertitude : $u(H)$ s'arrête au dixième de mètre, H aussi. L'incertitude sur h est ici négligeable devant celle due à v_0.

À LA CALCULATRICE



A.4.3 Indiquer si la flèche dépasse le haut de la perche. Justifier.

Données utiles hauteur de la perche : 30 m ; $32{,}4 \text{ m} \leqslant H \leqslant 35{,}0$ m (A.4.2)

Même la borne inférieure de l'encadrement, $32{,}4$ m, est supérieure à la hauteur de la perche (30 m).

Oui : compte tenu de l'incertitude, $H > 30$ m, la flèche dépasse le haut de la perche.

PIÈGE
Comparer seulement $33{,}7$ m à 30 m. La question suit le calcul d'incertitude : c'est l'intervalle entier qu'il faut situer par rapport à 30 m.

B.1 Établir le bilan des forces s'exerçant sur la flèche.

Système : {flèche}, assimilée à un point matériel F de masse m ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Les actions de l'air sont négligées : après le départ du tir, la flèche n'est soumise qu'à une seule force.

Le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, vertical, dirigé vers le bas, de valeur $P = m\,g$.

PIÈGE
Ajouter une « force de lancer » ou la force de la corde : dès que la flèche a quitté l'arc, l'arc n'agit plus sur elle.

B.2 En utilisant la deuxième loi de Newton, déterminer les coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération $\vec{a}$ de la flèche.

Deuxième loi de Newton, la masse étant constante : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Dans le repère (O ; x, y) de la figure 2, l'axe (Oy) est vertical vers le haut et $\vec{g}$ est vertical vers le bas :

$a_x(t) = 0$ et $a_y(t) = -g$

PIÈGE
Écrire $a_y = +g$. Le signe dépend de l'axe : ici (Oy) est orienté vers le haut, à l'opposé de $\vec{g}$.

B.3 Montrer que les équations horaires du mouvement de F sont $x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t$ et $y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t + h$.

$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de $a_x = 0$ et $a_y = -g$.

$v_x(t) = C_1$ et $v_y(t) = -g\, t + C_2$.

Condition initiale : $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$, de coordonnées $v_0 \cos\alpha$ et $v_0 \sin\alpha$, donc $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$:

$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(t) = -g\, t + v_0 \sin\alpha$.

$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OF}}{\mathrm{d}t}$: on prend à nouveau les primitives.

$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t + C_3$ et $y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t + C_4$.

Condition initiale : à $t = 0$, F a pour coordonnées $x(0) = 0$ et $y(0) = h$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = h$.

$$\boxed{x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t \text{ et } y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t + h}$$

PIÈGE
Prendre $C_4 = 0$: la flèche part du point F, sur l'axe (Oy), à la hauteur h et non de l'origine O.

MÉTHODE
Deux intégrations successives, et à chaque fois une constante fixée par les conditions initiales : $\vec{v_0}$ pour la vitesse, la position de départ pour les coordonnées.

B.4 Montrer que l'équation de la trajectoire de F peut s'écrire $y(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{g\, x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + (\tan\alpha)\, x + h$.

On élimine le temps. D'après $x(t)$: $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$.

On reporte dans $y(t)$:

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + h$$

Comme $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$:

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{g\, x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + (\tan\alpha)\, x + h}$$

COMPRENDRE
$y(x)$ est un polynôme du second degré en x, de coefficient dominant négatif : la trajectoire est une portion de parabole tournée vers le bas.

B.5 Indiquer, en justifiant, si le tir de l'archer peut lui permettre de marquer des points.

Données utiles $D = 5{,}0$ m ; $\alpha = 80^\circ$; $v_0 = 25{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $h = 1{,}80$ m ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; points marqués si la flèche passe entre 25 m et 30 m au niveau de la perche

La perche est à l'abscisse $x = D$. L'archer peut marquer des points si $25\ \text{m} \leqslant y(D) \leqslant 30\ \text{m}$.

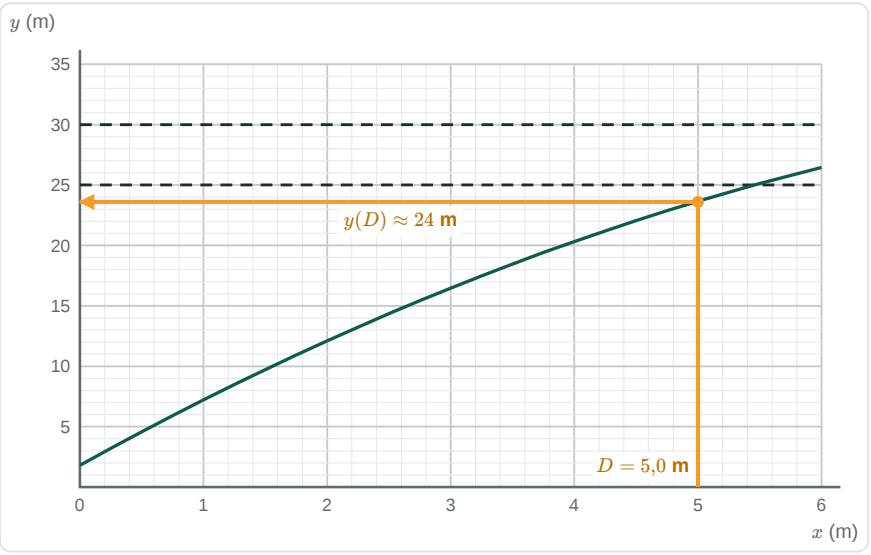
$$y(D) = -\frac{1}{2} \times \frac{g\,D^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + (\tan\alpha)\,D + h$$

$$y(D) = -\frac{1}{2} \times \frac{9{,}81 \times 5{,}0^2}{25{,}0^2 \times \cos^2(80^\circ)} + \tan(80^\circ) \times 5{,}0 + 1{,}80 = 24\ \text{m}$$

$y(D) \approx 24\ \text{m} < 25\ \text{m}$: la flèche passe sous les premiers oiseaux, ce tir ne permet pas de marquer des points.

PIÈGE
Calculatrice en radians : le résultat est alors faux sans que rien ne le signale. Vérifier le mode degrés avant de saisir $\cos(80^\circ)$ et $\tan(80^\circ)$.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme D. La flèche atteint la perche en montant, à $23{,}6$ m : il manque un peu plus d'un mètre. Un angle de tir légèrement plus grand suffirait.



B.5 · Trajectoire de la flèche et hauteur atteinte au niveau de la perche ($x = D$)

À LA CALCULATRICE

