à la recherche d'une autre Terre

Bac 2023 Centres étrangers 1 Jour 1 · Exercice 2 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

1 À partir de la figure 3, justifier l'utilisation du terme « périodique » pour décrire la variation de luminosité de l'étoile.

Sur la figure 3, la luminosité relative passe de 1,000 à 0,997 puis revient à 1,000, et ce même motif se répète à intervalles de temps égaux.

Le phénomène se reproduit identique à lui-même à intervalles de temps réguliers : il est **périodique**.

COMPRENDRE
Chaque creux correspond à un passage de l'exoplanète devant l'étoile : la période lue sur la figure est donc la période de révolution de P.

2 À partir de la figure 3, déterminer la valeur de la période T du phénomène le plus précisément possible, en indiquant la méthode employée.

Pour réduire l'incertitude de lecture, on mesure la durée du plus grand nombre possible de périodes entre deux creux situés sur des graduations.

Le 1er creux est à $t = 5$ h et le 12e à $t = 90$ h : ils sont séparés par 11 périodes.

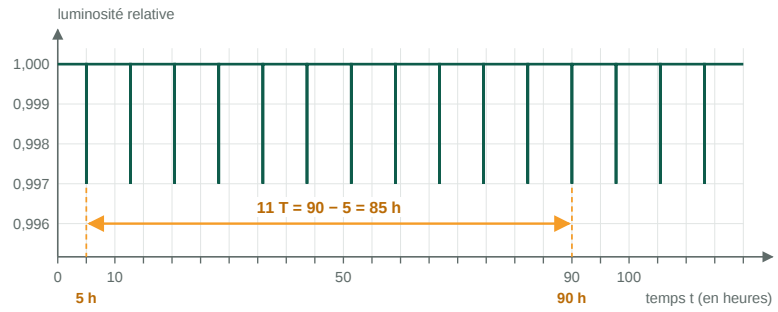
$11\,T = 90 - 5 = 85$ h, donc $T = \dfrac{85}{11}$

$T \approx 7{,}7$ h

PIÈGE
Entre le 1er et le 12e creux, il y a 11 intervalles, pas 12. Compter les creux au lieu des intervalles fausse la période.

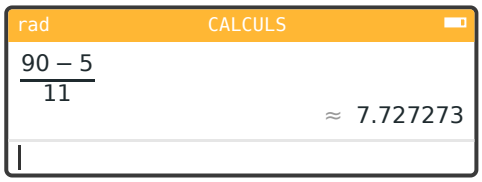
COMPRENDRE
La lecture se fait à l'heure près environ : deux chiffres significatifs suffisent pour T.

MÉTHODE
Mesurer onze périodes d'un coup divise par 11 l'erreur de lecture sur T.



2 · Figure 3 de l'annexe : onze périodes repérées entre le 1er et le 12e transit

À LA CALCULATRICE

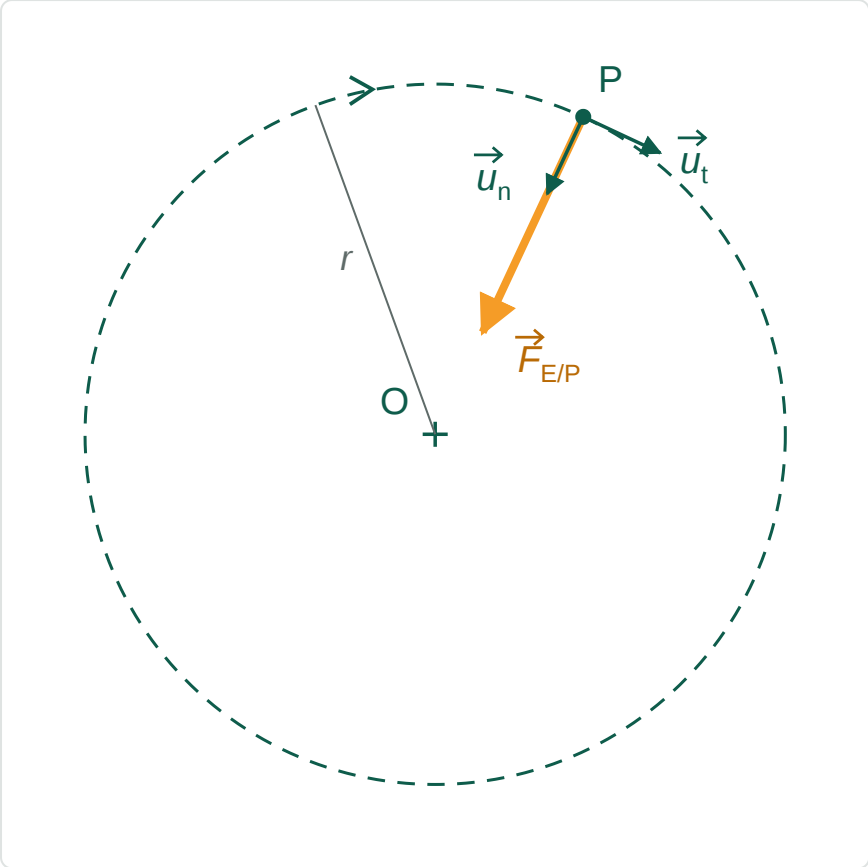


3 Sans souci d'échelle, représenter sur la figure 4 la force gravitationnelle exercée par l'étoile E sur l'exoplanète P.

La force gravitationnelle est attractive : elle s'applique en P, sa direction est la droite (PO) et elle est orientée de P vers O.

$\overrightarrow{F}_{E/P}$: flèche partant de P et pointant vers O, tracée sur la figure 4.

PIÈGE
Une flèche partant de O, ou dirigée vers l'extérieur de l'orbite, ne rapporte pas les points : la force s'applique sur P et attire P vers l'étoile.



3 · Figure 4 de l'annexe : force exercée par l'étoile E sur l'exoplanète P

4 Écrire l'expression vectorielle de cette force dans le repère de Frenet $(P, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$ en fonction de G, M_E, m_P et r.

La force est dirigée vers O, comme le vecteur unitaire $\vec{u}_n$, et la distance entre les centres est r.

$$\vec{F}_{E/P} = \frac{G\,M_E\,m_P}{r^2}\,\vec{u}_n$$

PIÈGE
Pas de signe « $-$ » : dans le repère de Frenet, $\vec{u}_n$ pointe déjà vers le centre de la trajectoire.

5 Énoncer la deuxième loi de Kepler, dite « loi des aires ».

Le segment qui relie le centre de l'étoile à celui de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

COMPRENDRE
La loi vaut pour tout astre en orbite autour d'un astre attracteur, ici P autour de E.

6 Compléter la figure 4 afin d'illustrer cette loi et justifier que le mouvement de l'exoplanète P est uniforme.

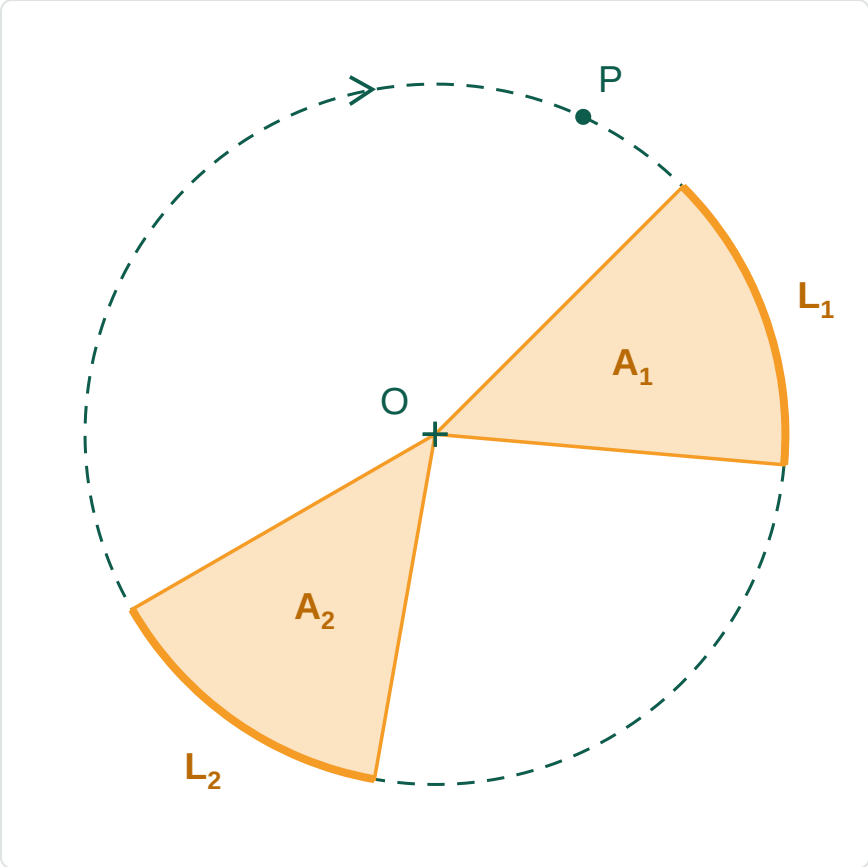
Sur la figure, on colorie deux aires A_1 et A_2 balayées par le segment [OP] pendant une même durée Δt. D'après la loi des aires, $A_1 = A_2$.

La trajectoire est un cercle : le rayon r est constant, donc deux secteurs de même aire interceptent des arcs de même longueur, $L_1 = L_2$.

L'exoplanète parcourt ainsi la même distance pendant la même durée : $\frac{L_1}{\Delta t} = \frac{L_2}{\Delta t}$, soit $v_1 = v_2$.

La valeur de la vitesse est la même en tout point de l'orbite : le mouvement est **uniforme**.

COMPRENDRE
Sur une orbite elliptique, la distance à l'étoile varie : des aires égales donnent des arcs inégaux et la vitesse change. C'est le cercle qui impose ici l'uniformité.



6 · Figure 4 de l'annexe : deux aires égales balayées pendant la même durée

7 Appliquer la deuxième loi de Newton à l'exoplanète P et démontrer que sa vitesse sur son orbite s'écrit $v_P = \sqrt{\dfrac{G\,M_E}{r}}$.

Système {exoplanète P}, de masse m_P constante ; référentiel de l'étoile E supposé galiléen ; seule force : $\overrightarrow{F}_{E/P}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = m_P\,\vec{a}$, soit $\dfrac{G\,M_E\,m_P}{r^2}\,\vec{u}_n = m_P\,\vec{a}$, donc

$$\vec{a} = \frac{G\,M_E}{r^2}\,\vec{u}_n$$

Le mouvement est circulaire uniforme, donc dans le repère de Frenet : $\vec{a} = \dfrac{v_P^2}{r}\,\vec{u}_n$.

Par identification : $\dfrac{v_P^2}{r} = \dfrac{G\,M_E}{r^2}$, soit $v_P^2 = \dfrac{G\,M_E}{r}$. La vitesse est positive :

$$\boxed{v_P = \sqrt{\frac{G\,M_E}{r}}}$$

COMPRENDRE
La masse m_P se simplifie : la vitesse sur l'orbite ne dépend que de la masse de l'étoile et du rayon r.

MÉTHODE
Toujours le même plan : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, expression de $\vec{a}$ dans le repère de Frenet, puis identification selon $\vec{u}_n$.

8 Donner l'expression de la période de révolution T en fonction de v_P et de r, puis en déduire que $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^3}{G\,M_E}$.

Pendant une période, l'exoplanète parcourt le périmètre $2\pi r$ de son orbite à la vitesse constante v_P :

$$T = \frac{2\pi\, r}{v_P}$$

On élève au carré et on remplace v_P^2 par $\dfrac{G\,M_E}{r}$ (question 7) :

$$T^2 = \frac{4\pi^2\, r^2}{v_P^2} = 4\pi^2\, r^2 \times \frac{r}{G\,M_E}$$

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2\, r^3}{G\,M_E}}$$

COMPRENDRE
Le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ ne dépend que de la masse de l'étoile : c'est la troisième loi de Kepler.

9 En admettant que $T = 7{,}7$ h, montrer que le rayon r de la trajectoire circulaire de l'exoplanète est proche d'un million de kilomètres.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; $M_E = 9{,}5 \times 10^{29}$ kg ; $T = 7{,}7$ h

De la relation de la question 8 : $r^3 = \dfrac{G\,M_E\,T^2}{4\pi^2}$, soit $r = \sqrt[3]{\dfrac{G\,M_E\,T^2}{4\pi^2}}$.

Conversion : $T = 7{,}7 \times 3600 = 27\,720$ s.

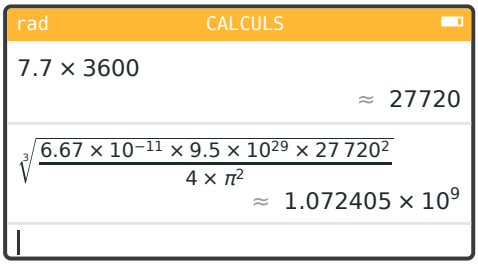
$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 9{,}5 \times 10^{29} \times 27\,720^2}{4\pi^2}} = 1{,}1 \times 10^9\ \text{m}$$

$r = 1{,}1 \times 10^6$ km, soit 1,1 million de kilomètres : valeur proche d'un million de kilomètres.

PIÈGE
Laisser T en heures donne un rayon faux d'un facteur supérieur à 200. Avec G en unités SI, T est en secondes et r sort en mètres.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme M_E et T, les données les moins précises.

À LA CALCULATRICE



10 Calculer la masse volumique de la planète et justifier la référence au fer dans le titre « Une planète de fer a été découverte ».

Données utiles $M_P = 0{,}55\,M_T$; $V_P = 0{,}37\,V_T$; $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m ; $\rho(\text{Fe}) = 7{,}9 \times 10^{3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

La Terre est assimilée à une sphère : $V_T = \dfrac{4}{3}\pi R_T^3$. Alors

$$\rho_P = \frac{M_P}{V_P} = \frac{0{,}55\,M_T}{0{,}37 \times \dfrac{4}{3}\pi R_T^3}$$

$$\rho_P = \frac{0{,}55 \times 5{,}97 \times 10^{24}}{0{,}37 \times \dfrac{4}{3}\pi \times (6{,}37 \times 10^{6})^3} = 8{,}2 \times 10^{3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Écart relatif avec le fer : $\dfrac{8{,}2 \times 10^{3} - 7{,}9 \times 10^{3}}{7{,}9 \times 10^{3}} \approx 4\ \%$.

$\rho_P = 8{,}2 \times 10^{3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, très proche de $\rho(\text{Fe})$: la planète peut être constituée essentiellement de fer, d'où le titre.

PIÈGE

Prendre $0{,}37\,R_T$ comme rayon de la planète : c'est le volume qui vaut 37 % de celui de la Terre, pas le rayon.

COMPRENDRE

Par comparaison, la Terre a une masse volumique moyenne de $5{,}5 \times 10^{3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$: l'exoplanète est nettement plus dense, ce qui renforce l'hypothèse du fer.

À LA CALCULATRICE

