Comprendre les nuages

Bac 2023 Centres étrangers 2 Jour 2 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 56**

Q.1 Montrer que la valeur P du poids de la goutte est environ $4{,}1 \times 10^{-11}$ N.

Données utiles $r = 10\ \mu\text{m} = 10 \times 10^{-6}$ m ; $\rho_{\text{eau}} = 1000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $g = 9{,}8\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

La masse de la gouttelette est $m = \rho_{\text{eau}}\, V$, donc :

$$P = m\,g = \rho_{\text{eau}} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \times g$$

$$P = 1000 \times \frac{4}{3}\pi \times (10 \times 10^{-6})^3 \times 9{,}8 = 4{,}1 \times 10^{-11}\ \text{N}$$

$P = 4{,}1 \times 10^{-11}$ N, ce qui est bien la valeur annoncée.

PIÈGE
Laisser le rayon en micromètres : le rayon est élevé au cube, l'erreur est alors d'un facteur 10^{18}. Vérifier aussi que l'énoncé donne le rayon et non le diamètre.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g et r qui sont les données les moins précises. Cette règle sert pour tous les calculs de l'exercice.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{1000 \times 4}{3} \times \pi \times (10 \times 10^{-6})^3 \times 9.8 \approx 4.105014 \times 10^{-11}$$

Q.2 Déterminer la valeur F de la force verticale ascendante exercée par l'air sur la gouttelette pour une vitesse verticale de l'air de $0{,}10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Données utiles $F = k\,\eta\,r\,v$; $k = 18{,}8$; $\eta = 15 \times 10^{-6}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$; $r = 10 \times 10^{-6}$ m ; $v = 0{,}10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

La gouttelette est immobile : la vitesse de l'air par rapport à elle est $v = 0{,}10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$F = k\,\eta\,r\,v = 18{,}8 \times 15 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{-6} \times 0{,}10$$

$F = 2{,}8 \times 10^{-10}$ N

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$18.8 \times 15 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{-6} \times 0.10 \approx 2.82 \times 10^{-10}$$

Q.3 En déduire si la goutte monte, tombe ou reste immobile. Justifier.

Données utiles $P = 4{,}1 \times 10^{-11}$ N (Q.1) ; $F = 2{,}8 \times 10^{-10}$ N (Q.2)

Les deux forces sont verticales et de sens opposés : $\vec{P}$ vers le bas, $\vec{F}$ vers le haut.

$\frac{F}{P} = \frac{2{,}8 \times 10^{-10}}{4{,}1 \times 10^{-11}} \approx 6{,}8$: la force de l'air est environ sept fois plus grande que le poids.

La somme des forces $\vec{P} + \vec{F}$ est donc dirigée vers le haut. D'après la deuxième loi de Newton, appliquée dans le référentiel terrestre galiléen, l'accélération a le même sens. La gouttelette étant initialement immobile :

$F > P$: la goutte **monte**.

PIÈGE
Comparer les mantisses sans regarder les puissances de dix : $2{,}8 \times 10^{-10}$ est plus grand que $4{,}1 \times 10^{-11}$.

MÉTHODE
Le sens de la somme des forces donne le sens de l'accélération, pas celui de la vitesse. C'est parce que la goutte part du repos que l'on peut conclure sur le sens du mouvement.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{2.8 \times 10^{-10}}{4.1 \times 10^{-11}} \approx 6.829268$$

Q.4 En exploitant les réponses précédentes, déterminer le rayon minimum que doit posséder une gouttelette pour tomber, la vitesse ascendante de l'air restant inchangée.

Données utiles $k = 18{,}8$; $\eta = 15 \times 10^{-6}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$; $v = 0{,}10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\rho_{\text{eau}} = 1000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $g = 9{,}8\ \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$

Une gouttelette immobile se met à tomber si son poids l'emporte sur la force de l'air : $P > F$.

$$\rho_{\text{eau}} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \times g > k\,\eta\,r\,v$$

En divisant par r (positif) : $r^2 > \dfrac{3\,k\,\eta\,v}{4\pi\,\rho_{\text{eau}}\,g}$

Le rayon limite est donc :

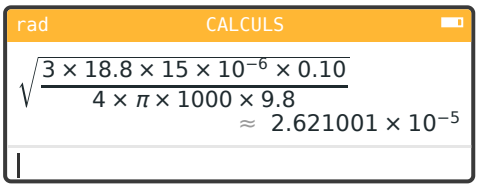
$$r_{\text{min}} = \sqrt{\frac{3\,k\,\eta\,v}{4\pi\,\rho_{\text{eau}}\,g}} = \sqrt{\frac{3 \times 18{,}8 \times 15 \times 10^{-6} \times 0{,}10}{4\pi \times 1000 \times 9{,}8}} = 2{,}6 \times 10^{-5}\ \text{m}$$

$r_{\text{min}} = 2{,}6 \times 10^{-5}\ \text{m} = 26\ \mu\text{m}$: la gouttelette tombe si son rayon dépasse cette valeur.

PIÈGE
Réutiliser les valeurs numériques de P et de F des questions 1 et 2 : elles ne valent que pour $r = 10\ \mu$m. Il faut repartir des expressions littérales.

COMPRENDRE
Le poids varie comme r^3, la force de l'air comme r : quand la goutte grossit, le poids finit toujours par l'emporter. Le diamètre limite, 52 µm, est bien dans l'intervalle de 10 à 100 µm annoncé.

À LA CALCULATRICE



Q.5 Exprimer la force d'interaction gravitationnelle $\overrightarrow{F_{T/S}}$ que la Terre exerce sur le satellite, en fonction de $\vec{u}_n$, M_T, M_S, R_T et h.

La distance entre le centre T de la Terre et le satellite S est $R_T + h$; la force est dirigée de S vers T, comme $\vec{u}_n$.

$$\overrightarrow{F_{T/S}} = G\,\frac{M_T\,M_S}{(R_T + h)^2}\,\vec{u}_n$$

PIÈGE
Écrire h^2 au dénominateur, ou ajouter un signe « $-$ » : sur le schéma, $\vec{u}_n$ pointe déjà vers le centre de la Terre.

Q.6 En appliquant la seconde loi de Newton et en utilisant le repère de Frenet, montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

Système : le satellite, de masse M_S constante. Référentiel géocentrique supposé galiléen. Seule force : $\overrightarrow{F_{T/S}}$.

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F_{T/S}} = M_S\,\vec{a}$, d'où

$$\vec{a} = \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2}\,\vec{u}_n$$

Dans le repère de Frenet, pour une trajectoire circulaire de rayon $R_T + h$:

$$\vec{a} = \frac{\text{d}v}{\text{d}t}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{R_T + h}\,\vec{u}_n$$

L'accélération obtenue n'a pas de composante selon $\vec{u}_t$. Par identification :

$\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} = 0$: la valeur de la vitesse est constante, le mouvement est **uniforme**.

PIÈGE
Dire que l'accélération est nulle parce que le mouvement est uniforme. Seule sa composante tangentielle est nulle ; la composante normale courbe la trajectoire.

MÉTHODE
Toujours les trois mêmes étapes : deuxième loi de Newton, expression de $\vec{a}$ dans le repère de Frenet, identification. Selon $\vec{u}_t$ on obtient l'uniformité, selon $\vec{u}_n$ la vitesse.

Q.7 Montrer que la valeur de la vitesse du satellite est $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_T + h}}$.

On identifie cette fois les composantes selon $\vec{u}_n$ des deux expressions de $\vec{a}$ (Q.6) :

$$\frac{v^2}{R_T + h} = \frac{G\,M_T}{(R_T + h)^2} \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{G\,M_T}{R_T + h}$$

$v = \sqrt{\dfrac{G \times M_T}{R_T + h}}$, relation attendue.

COMPRENDRE
La masse du satellite a disparu : tous les objets placés à la même altitude tournent à la même vitesse. Plus l'orbite est haute, plus la vitesse est faible.

Q.8 En déduire que la période de révolution du satellite est $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_T + h)^3}{G \times M_T}}$.

Pendant une période T, le satellite parcourt à vitesse constante le périmètre du cercle de rayon $R_T + h$:

$$T = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{v} = 2\pi\,(R_T + h)\sqrt{\frac{R_T + h}{G\,M_T}}$$

Comme $R_T + h = \sqrt{(R_T + h)^2}$, on regroupe sous la racine :

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_T + h)^3}{G \times M_T}}$, relation attendue.

PIÈGE
Utiliser $v = \dfrac{d}{\Delta t}$ sans préciser que le mouvement est uniforme (Q.6) : c'est ce qui autorise à écrire la vitesse comme périmètre divisé par période.

Q.9 Calculer la période de révolution T et dire si elle est en accord avec la phrase « Le satellite effectuera environ 16 fois le tour de la Terre chaque jour ».

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2} ; $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km ; $h = 390$ km

$R_T + h = 6{,}37 \times 10^6 + 3{,}90 \times 10^5 = 6{,}76 \times 10^6$ m.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}76 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}} = 5{,}53 \times 10^3 \text{ s}$$

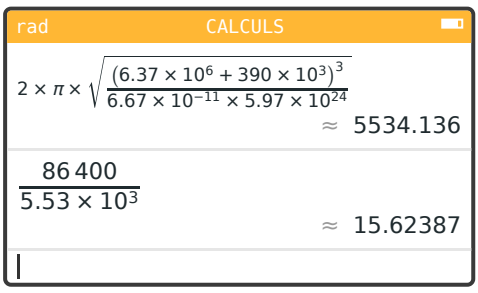
soit environ 1 h 32 min. Un jour dure $24 \times 3600 = 86\,400$ s, donc le nombre de tours par jour est :

$$N = \frac{86\,400}{5{,}53 \times 10^3} = 15{,}6$$

$T = 5{,}53 \times 10^3$ s, soit $N \approx 15{,}6$ tours par jour : c'est en accord avec « environ 16 ».

PIÈGE
Laisser R_T et h en kilomètres : G est en unités SI, les distances doivent être en mètres. Autre oubli fréquent : le cube sur $(R_T + h)$.

À LA CALCULATRICE



Q.10 Déterminer si les ondes électromagnétiques utilisées par le CPR permettent d'obtenir un signal exploitable. Justifier.

Données utiles $f_e = 94{,}05 \times 10^9$ Hz ; $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (valeur à connaître) ; diamètre des gouttelettes : de 10 à 100 µm ; condition : λ supérieure à dix fois le diamètre

Longueur d'onde des ondes émises :

$$\lambda = \frac{c}{f_e} = \frac{3{,}00 \times 10^8}{94{,}05 \times 10^9} = 3{,}19 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

La condition la plus exigeante concerne les plus grosses gouttelettes, de diamètre $100\ \mu\text{m}$:

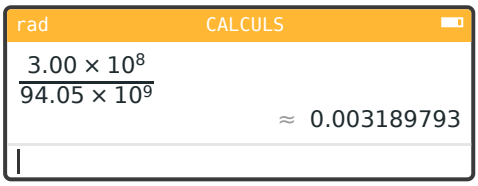
$10 \times 100 \times 10^{-6} = 1{,}0 \times 10^{-3}$ m, soit 1,0 mm.

$\lambda = 3{,}19\ \text{mm} > 1{,}0\ \text{mm}$: la condition est vérifiée pour toutes les gouttelettes, le signal est exploitable.

PIÈGE
Ne tester que le diamètre de 10 µm. La condition doit tenir pour toutes les gouttelettes : c'est le plus grand diamètre qui décide.

COMPRENDRE
La célérité de la lumière dans le vide n'est pas rappelée par le sujet : elle fait partie des valeurs à connaître, et sert aussi à la question suivante.

À LA CALCULATRICE



Q.11 Vérifier que la distance parcourue par le satellite pendant un aller-retour des ondes entre le satellite et le nuage est très inférieure à la longueur du nuage.

Données utiles altitude du satellite : 390 km ; altitude du nuage : 2 km ; $v = 7{,}5 \times 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; longueur du nuage : environ 1 km ; $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Distance entre le satellite et le nuage, situé à sa verticale : $D = 390 - 2 = 388$ km.

Durée de l'aller-retour des ondes, qui se propagent à la célérité c :

$$\Delta t = \frac{2D}{c} = \frac{2 \times 388 \times 10^3}{3{,}00 \times 10^8} = 2{,}59 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

Distance parcourue par le satellite pendant cette durée :

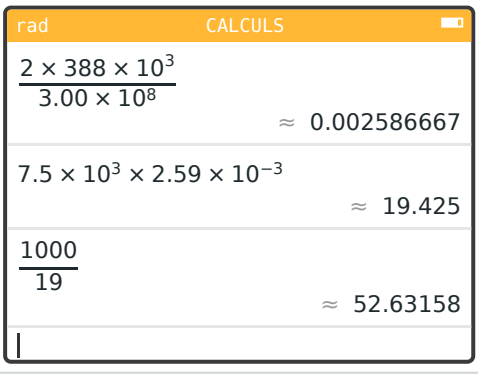
$$d_S = v \times \Delta t = 7{,}5 \times 10^3 \times 2{,}59 \times 10^{-3} = 19\ \text{m}$$

$d_S \approx 19$ m, environ 50 fois moins que la longueur du nuage (1 km) : elle est bien très inférieure.

PIÈGE
Oublier le facteur 2 de l'aller-retour, ou prendre 390 km sans retrancher l'altitude du nuage (ce second oubli change peu le résultat, mais la démarche est évaluée).

COMPRENDRE
Le satellite reçoit l'écho alors qu'il est encore pratiquement à la verticale du point visé : on peut le considérer comme immobile pendant une mesure.

À LA CALCULATRICE



Q.12 Estimer la distance d minimale pour qu'une personne ne subisse pas de gêne liée au bruit du haut-parleur. Commenter le point de vue du journaliste.

Données utiles $L_1 = 160$ dB à $d_1 = 1{,}0$ m ; $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}$ W · m^{-2} ; $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$; $I = \frac{P}{4\pi d^2}$; échelle des niveaux : « désagréable » à 80 dB

Hypothèses. Le haut-parleur est une source ponctuelle qui émet de la même façon dans toutes les directions ; sa puissance P est constante ; l'air n'absorbe pas le son et il n'y a pas d'obstacle. D'après l'échelle, on admet qu'il n'y a plus de gêne en dessous du niveau « désagréable » : $L_2 = 80$ dB.

Intensités. De $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ on tire $I = I_0 \times 10^{L/10}$:

$I_1 = 1{,}0 \times 10^{-12} \times 10^{16} = 1{,}0 \times 10^{4}$ W · m^{-2} à 1,0 m ; $I_2 = 1{,}0 \times 10^{-12} \times 10^{8} = 1{,}0 \times 10^{-4}$ W · m^{-2} à la distance d.

Puissance de la source. $P = I_1 \times 4\pi d_1^2 = 1{,}0 \times 10^{4} \times 4\pi \times 1{,}0^2 = 1{,}3 \times 10^{5}$ W.

Distance. La même puissance se répartit sur la sphère de rayon d : $I_2 = \frac{P}{4\pi d^2}$, donc

$$d = \sqrt{\frac{P}{4\pi I_2}} = d_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = 1{,}0 \times \sqrt{\frac{1{,}0 \times 10^{4}}{1{,}0 \times 10^{-4}}} = 1{,}0 \times 10^{4} \text{ m}$$

Commentaire. À 1,0 m, le niveau (160 dB) dépasse largement le seuil de douleur (120 dB), et il faut s'éloigner d'une dizaine de kilomètres pour ne plus être gêné. Affirmer que ces ondes sonores sont à peine audibles est donc faux.

$d \approx 1{,}0 \times 10^{4}$ m $= 10$ km (pour un seuil de gêne fixé à 80 dB) ; le son est très loin d'être « à peine audible ».

PIÈGE
Raisonner directement sur les décibels (« moitié du niveau, donc distance double »). Les niveaux ne sont pas proportionnels aux intensités : il faut repasser par I.

COMPRENDRE
Le seuil de gêne est un choix à justifier par l'échelle. Avec 60 dB (« bruyant »), on trouve 100 km ; avec 50 dB, environ 320 km. La conclusion sur le journaliste ne change pas.

MÉTHODE
Chaque fois que la distance est multipliée par 10, l'intensité est divisée par 100 et le niveau baisse de 20 dB. Passer de 160 à 80 dB demande quatre facteurs 10 : $1{,}0$ m $\times 10^{4}$.

À LA CALCULATRICE

