# Autour de Saturne

Bac 2023 Asie Jour 1 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 45**

**1** Montrer que l'angle $\theta$ sous lequel se présente Titan depuis la Terre vaut approximativement $3{,}6 \times 10^{-6}$ rad.

**Données utiles** $d = 5{,}2 \times 10^{3}$ km ; $D = 1{,}43 \times 10^{9}$ km ; $\tan\theta \approx \theta$

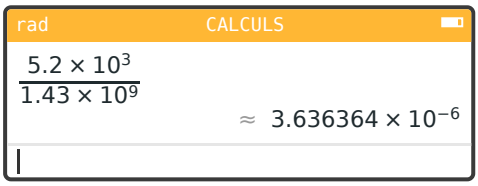
Titan, de diamètre $d$, est vu à la distance $D$ : $\tan\theta = \dfrac{d}{D}$, et comme l'angle est petit, $\theta \approx \dfrac{d}{D}$.

$$\theta = \frac{5{,}2 \times 10^{3}}{1{,}43 \times 10^{9}} = 3{,}6 \times 10^{-6}\ \text{rad}$$

$\theta = 3{,}6 \times 10^{-6}$ rad : c'est bien la valeur attendue.

**COMPRENDRE**
Deux chiffres significatifs, comme $d$, la donnée la moins précise. Les deux longueurs sont en km : le rapport est sans unité, inutile de convertir en mètres.

**À LA CALCULATRICE**




**2** Justifier que Titan n'est pas observable à l'œil nu.

**Données utiles** $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ rad ; $\theta = 3{,}6 \times 10^{-6}$ rad (Q1)

L'œil ne sépare deux points que si l'angle sous lequel il les voit est au moins égal à $\varepsilon$.

Ici $\theta = 3{,}6 \times 10^{-6}\ \text{rad} < \varepsilon = 3 \times 10^{-4}\ \text{rad}$.

$\theta < \varepsilon$ : Titan n'est pas observable à l'œil nu.

**PIÈGE**
Une phrase sans comparaison chiffrée ne rapporte rien : il faut écrire les deux valeurs et l'inégalité.

**3** En déduire la valeur $G_{min}$ du grossissement minimal que doit avoir un instrument d'optique pour observer Titan depuis la Terre.

**Données utiles** $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ rad ; $\theta = 3{,}6 \times 10^{-6}$ rad (Q1)

Le grossissement est $G = \dfrac{\theta'}{\theta}$, où $\theta'$ est l'angle sous lequel l'objet est vu à travers l'instrument.

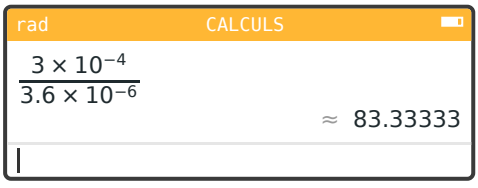
Titan est observable si $\theta' \geqslant \varepsilon$, soit $G\,\theta \geqslant \varepsilon$. Le grossissement minimal correspond à $\theta' = \varepsilon$ :

$$G_{min} = \frac{\varepsilon}{\theta} = \frac{3 \times 10^{-4}}{3{,}6 \times 10^{-6}} = 83$$

$G_{min} \approx 83$, soit environ $8 \times 10^{1}$ avec un seul chiffre significatif.

**COMPRENDRE**
$\varepsilon$ n'est donné qu'avec un chiffre significatif : le résultat est un ordre de grandeur. Un grossissement est un rapport de deux angles, il n'a pas d'unité.

**À LA CALCULATRICE**



**4** Identifier l'objectif et l'oculaire sur le schéma de l'annexe et positionner les foyers $F_2$ et $F_2'$ de la lentille $L_2$ pour obtenir une lunette afocale.

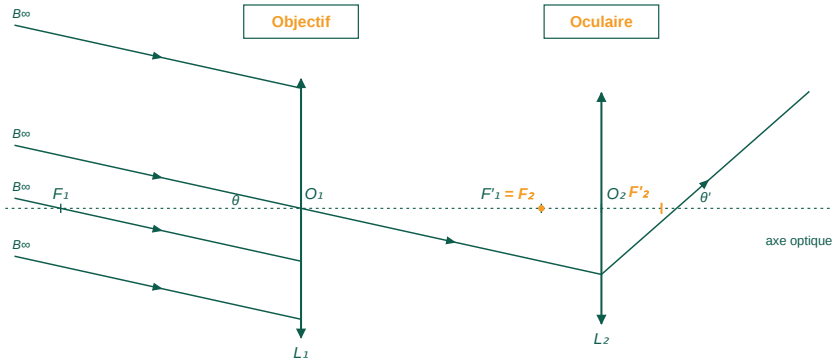
L'objectif est la lentille qui reçoit la lumière de l'objet : c'est $L_1$.
L'oculaire est la lentille placée devant l'œil : c'est $L_2$.

Lunette afocale : l'image intermédiaire, formée dans le plan focal image de $L_1$, doit être renvoyée à l'infini par $L_2$ ; elle doit donc se trouver dans le plan focal objet de $L_2$. Ainsi $F_2$ est confondu avec $F_1'$.

$F_2'$ est le symétrique de $F_2$ par rapport à $O_2$ : $O_2F_2' = F_2O_2$.

> $L_1$ : objectif ; $L_2$ : oculaire ; $F_2$ confondu avec $F_1'$ ; $F_2'$ symétrique de $F_2$ par rapport à $O_2$.

**PIÈGE**
Placer $F_2'$ sans reporter la distance $F_2O_2$ au compas ou à la règle : la suite de la construction (question 5) en dépend.




**4** · Annexe, question 4 : en orange, ce que l'on ajoute (noms des lentilles, foyers de $L_2$)

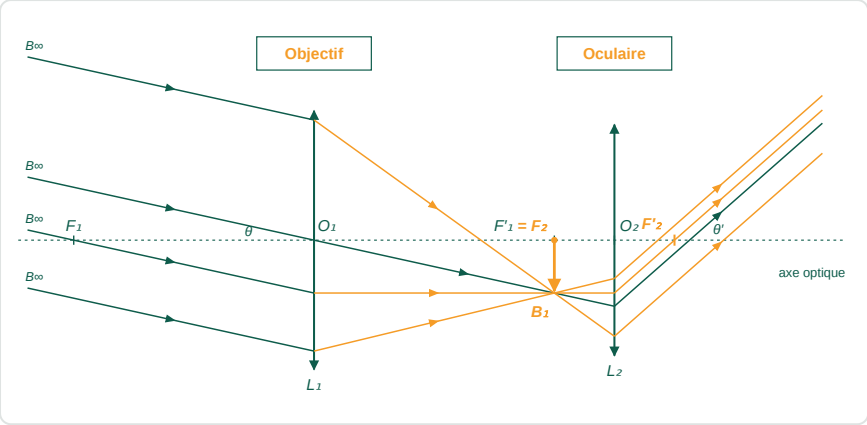
**5** Construire sur l'annexe la marche complète des rayons issus du point objet $B_\infty$ situé à l'infini, en faisant apparaître l'image intermédiaire $B_1$ donnée par $L_1$.

- Le rayon qui passe par $O_1$ n'est pas dévié. $B_\infty$ étant à l'infini, son image $B_1$ est dans le plan focal image de $L_1$ : $B_1$ est à l'intersection de ce rayon et de la perpendiculaire à l'axe passant par $F_1'$.
- Le rayon qui passe par $F_1$ ressort de $L_1$ parallèle à l'axe : il passe aussi par $B_1$, ce qui contrôle le tracé.
- Tous les rayons issus de $B_\infty$ convergent en $B_1$ après $L_1$, puis se prolongent jusqu'à $L_2$.
- $B_1$ est dans le plan focal objet de $L_2$ : les rayons ressortent de $L_2$ parallèles entre eux, donc parallèles au rayon émergent déjà tracé. Le rayon arrivé parallèle à l'axe ressort en passant par $F_2'$.

> $B_1$ est dans le plan focal commun, sous $F_1'$ ; les rayons émergents sont tous parallèles : l'image définitive est à l'infini.

**PIÈGE**
Arrêter les rayons en $B_1$, ou les faire ressortir de $L_2$ parallèles à l'axe optique. Ils sont parallèles entre eux, inclinés de l'angle $\theta'$.

**MÉTHODE**
Lunette afocale : 1) rayon par $O_1$ non dévié, il donne $B_1$ dans le plan focal image ; 2) tous les rayons incidents passent par $B_1$ ; 3) en sortie, des parallèles à la droite $(B_1O_2)$.




**5** · Annexe complétée (questions 4 et 5) : en orange, les tracés de l'élève

**6** À partir de la définition du grossissement $G$, établir que pour une lunette afocale $G = \dfrac{f'_{ob}}{f'_{oc}}$.

Par définition, $G = \dfrac{\theta'}{\theta}$. On note $A_1$ le pied de l'image intermédiaire : $A_1$ est en $F'_1 = F_2$.

Dans le triangle $O_1A_1B_1$, rectangle en $A_1$ : $\tan\theta = \dfrac{A_1B_1}{O_1F'_1} = \dfrac{A_1B_1}{f'_{ob}}$.

Dans le triangle $O_2A_1B_1$, rectangle en $A_1$ : $\tan\theta' = \dfrac{A_1B_1}{F_2O_2} = \dfrac{A_1B_1}{f'_{oc}}$.

Les angles sont petits : $\theta \approx \dfrac{A_1B_1}{f'_{ob}}$ et $\theta' \approx \dfrac{A_1B_1}{f'_{oc}}$, d'où

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{A_1B_1}{f'_{oc}} \times \frac{f'_{ob}}{A_1B_1}$$

$$\boxed{G = \frac{f'_{ob}}{f'_{oc}}}$$

**PIÈGE**
Partir directement du rapport des distances focales. La question impose de partir de $G = \theta'/\theta$ et d'exprimer chaque angle dans un triangle rectangle nommé.

**7** Parmi les oculaires disponibles, indiquer en justifiant celui qui permet d'obtenir le grossissement maximal.

**Données utiles** $f'_{ob} = 3{,}10$ m ; $f'_{oc}$ : 12 mm, 25 mm ou 40 mm

$G = \dfrac{f'_{ob}}{f'_{oc}}$ avec $f'_{ob}$ fixée : $G$ est d'autant plus grand que $f'_{oc}$ est petite.

Le grossissement est maximal avec l'oculaire de distance focale $f'_{oc} = 12$ mm.

**8** Indiquer s'il est possible d'observer chacune des deux lunes, Titan et Janus, à l'aide de cette lunette.

**Données utiles** $f'_{ob} = 3{,}10$ m ; $f'_{oc} = 12$ mm (Q7) ; $\theta = 3{,}6 \times 10^{-6}$ rad (Q1) ; $\theta_J = 1{,}3 \times 10^{-7}$ rad ; $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ rad

On se place dans le cas le plus favorable, celui du grossissement maximal :

$$G_{max} = \frac{f'_{ob}}{f'_{oc}} = \frac{3{,}10}{12 \times 10^{-3}} = 258$$

Angle sous lequel chaque lune est vue dans la lunette, $\theta' = G_{max} \times \theta$ :

Titan : $\theta'_T = 258 \times 3{,}6 \times 10^{-6} = 9{,}3 \times 10^{-4}$ rad $> \varepsilon$.

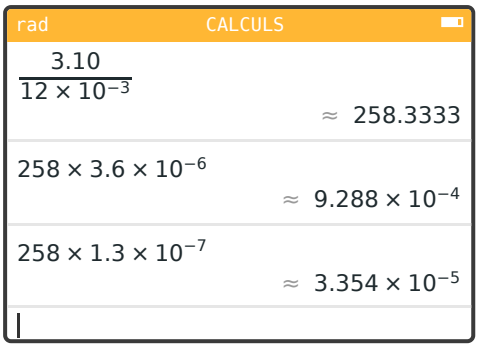
Janus : $\theta'_J = 258 \times 1{,}3 \times 10^{-7} = 3{,}4 \times 10^{-5}$ rad $< \varepsilon$.

Titan est observable avec cette lunette ($\theta'_T > \varepsilon$), Janus ne l'est pas ($\theta'_J < \varepsilon$).

**PIÈGE**
Diviser 3,10 par 12 sans convertir : les deux distances focales doivent être dans la même unité (m ou mm).

**COMPRENDRE**
Autre rédaction possible : comparer $G_{max} = 258$ au grossissement minimal de chaque lune, $\varepsilon/\theta$. Il vaut 83 pour Titan et environ $2{,}3 \times 10^3$ pour Janus.

À LA CALCULATRICE




**9** Donner une estimation de la longueur $L$ de la lunette de l'observatoire de Marseille en s'appuyant sur le schéma de l'annexe et sur les valeurs des distances focales.

**Données utiles** $f'_{ob} = 3{,}10$ m ; $f'_{oc}$ : 12 mm, 25 mm ou 40 mm

Sur le schéma, la longueur de la lunette est la distance entre les deux lentilles. Comme $F'_1$ et $F_2$ sont confondus :

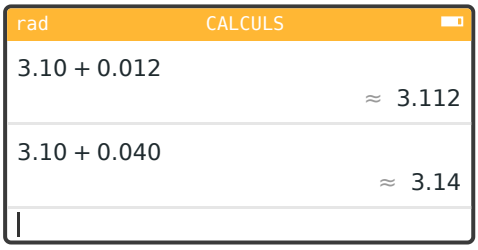
$$L \approx O_1O_2 = O_1F'_1 + F_2O_2 = f'_{ob} + f'_{oc}$$

Selon l'oculaire : de $3{,}10 + 0{,}012 = 3{,}11$ m à $3{,}10 + 0{,}040 = 3{,}14$ m.

$L \approx 3{,}1$ m : la longueur de la lunette est pratiquement la distance focale de l'objectif.

**COMPRENDRE**
« Estimation » : un ordre de grandeur justifié suffit. La distance focale de l'oculaire, cent à deux cents fois plus petite que celle de l'objectif, change très peu le résultat.

À LA CALCULATRICE




**10** Nommer le phénomène physique qui limite le pouvoir de résolution de la lunette.

La lumière est une onde : en traversant l'ouverture circulaire de l'objectif, de diamètre $d_{ob}$, elle s'étale et l'image d'un point devient une tache.

Il s'agit de la **diffraction** de la lumière par la monture de l'objectif.

**11** Pour la longueur d'onde $\lambda = 550$ nm et pour un grossissement $G = 260$, vérifier que la lunette permet d'observer Titan correctement.

**Données utiles** $d_{ob} = 260$ mm ; $\theta = 3{,}6 \times 10^{-6}$ rad (Q1) ; $\alpha = \dfrac{1{,}22 \times \lambda}{d_{ob}}$ ; $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ rad

Pouvoir de résolution de la lunette :

$$\alpha = \frac{1{,}22 \times \lambda}{d_{ob}} = \frac{1{,}22 \times 550 \times 10^{-9}}{0{,}260} = 2{,}58 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

Écart angulaire entre les pôles A et B vus dans la lunette :

$$\theta' = G \times \theta = 260 \times 3{,}6 \times 10^{-6} = 9{,}4 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

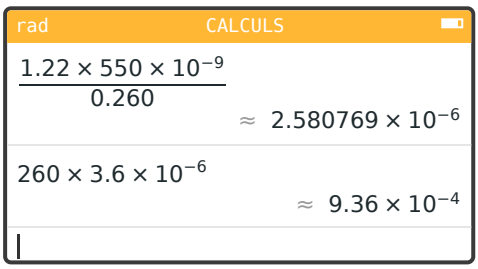
$\theta' > \alpha$ : les deux pôles sont discernés. De plus $\theta' > \varepsilon$ : l'œil placé derrière l'oculaire les sépare.

$\theta' = 9{,}4 \times 10^{-4}$ rad $> \alpha = 2{,}58 \times 10^{-6}$ rad : la lunette permet d'observer Titan correctement.

**PIÈGE**
Laisser $\lambda$ en nm et $d_{ob}$ en mm. Il faut $\lambda = 550 \times 10^{-9}$ m et $d_{ob} = 0{,}260$ m pour obtenir $\alpha$ en radian.

**COMPRENDRE**
Le critère reste vérifié avant grossissement : $\theta = 3{,}6 \times 10^{-6}$ rad $> \alpha$. La marge est alors faible, les taches de diffraction des deux pôles sont tout juste séparées par l'objectif.

**À LA CALCULATRICE**




**12** Expliquer pourquoi il est préférable d'utiliser des lunettes avec un objectif ayant un grand diamètre d'ouverture.

$\alpha = \dfrac{1{,}22 \times \lambda}{d_{ob}}$ : pour une longueur d'onde donnée, $\alpha$ est inversement proportionnel à $d_{ob}$.

Plus le diamètre de l'objectif est grand, plus $\alpha$ est petit : la diffraction est moins marquée et la lunette distingue des points plus rapprochés.

Un grand diamètre d'ouverture diminue $\alpha$ : la lunette sépare des détails plus fins.

**COMPRENDRE**
Un grand objectif collecte aussi davantage de lumière, ce qui rend visibles des astres peu lumineux. Ici, c'est l'argument de la diffraction qui est attendu.

**13** Retrouver la relation 1, $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$, en utilisant la deuxième loi de Newton et la loi d'interaction gravitationnelle.

Système : le satellite, de masse $m$ constante. Référentiel : centré sur Saturne (saturnocentrique), supposé galiléen. Seule force : l'attraction gravitationnelle de Saturne, dirigée vers son centre :

$$\vec{F} = \frac{G\,m\,M_S}{r^2}\,\vec{u}_n$$

Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \dfrac{G\,M_S}{r^2}\,\vec{u}_n$.

Dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon $r$ : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_n + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t$.

Selon $\vec{u}_t$ : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, la vitesse est constante.

Selon $\vec{u}_n$ : $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G\,M_S}{r^2}$, soit $v^2 = \dfrac{G\,M_S}{r}$.

$v = \sqrt{\dfrac{G \times M_S}{r}}$ : on retrouve la relation 1.

**PIÈGE**
Oublier le référentiel ou écrire la force sans vecteur unitaire. La masse $m$ du satellite se simplifie : la vitesse n'en dépend pas.

**MÉTHODE**
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton, accélération dans le repère de Frenet, identification selon $\vec{u}_n$.

**14** Montrer que l'expression de la vitesse du satellite permet de retrouver la troisième loi de Kepler $T^2 = k\,r^3$ avec $k = \dfrac{4\pi^2}{G \times M_S}$.

Le mouvement est circulaire et uniforme : pendant une période $T$, le satellite parcourt le périmètre $2\pi r$ de son orbite à la vitesse $v$.

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \text{donc} \quad T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{et} \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2}$$

Avec $v^2 = \dfrac{G\,M_S}{r}$ (relation 1) :

$$T^2 = 4\pi^2 r^2 \times \frac{r}{G\,M_S} = \frac{4\pi^2}{G\,M_S}\,r^3$$

$T^2 = k\,r^3$ avec $k = \dfrac{4\pi^2}{G \times M_S}$ : c'est la troisième loi de Kepler.

**COMPRENDRE**
$k$ ne dépend que de l'astre attracteur : il a la même valeur pour Janus, Titan et chaque morceau des anneaux. C'est ce qui servira aux questions 15 et 17.

**15** Déterminer la masse de Saturne sachant que la période de révolution de Janus est de 17 h.

**Données utiles** $R_J = 1{,}51 \times 10^5$ km ; $T_J = 17$ h ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s$^{-2}$

Troisième loi de Kepler appliquée à Janus : $\dfrac{T_J^2}{} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_S}\,R_J^3$, donc

$$M_S = \frac{4\pi^2 R_J^3}{G\,T_J^2}$$

Conversions : $R_J = 1{,}51 \times 10^8$ m ; $T_J = 17 \times 3600 = 6{,}12 \times 10^4$ s.

$$M_S = \frac{4\pi^2 \times (1{,}51 \times 10^8)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (6{,}12 \times 10^4)^2} = 5{,}4 \times 10^{26}\ \text{kg}$$

Remarque : le sujet écrit l'unité de $G$ avec « km$^{-1}$ » ; il faut lire kg$^{-1}$.

$M_S = 5{,}4 \times 10^{26}$ kg

**PIÈGE**
Laisser $R_J$ en km ou $T_J$ en heures : l'erreur est d'un facteur $10^9$ pour le rayon (il est au cube). Mettre des parenthèses autour du dénominateur à la calculatrice.

**COMPRENDRE**
Deux chiffres significatifs, comme la période (17 h). L'unité de $G$ est m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s$^{-2}$ : la coquille du sujet ne change pas la valeur numérique à utiliser.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$17 \times 3600$

$61\,200$

$$\frac{4 \times \pi^2 \times (1.51 \times 10^8)^3}{6.67 \times 10^{-11} \times (6.12 \times 10^4)^2}$$

$\approx 5.440789 \times 10^{26}$

**16** Justifier qualitativement que tous les corps du premier anneau ne tournent pas à la même vitesse autour de Saturne.

**Données utiles** $r_{int} = 6{,}69 \times 10^4$ km ; $r_{ext} = 7{,}45 \times 10^4$ km

D'après la relation 1, $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_S}{r}}$ : la vitesse d'un corps en orbite ne dépend que du rayon $r$ de son orbite, et elle diminue quand $r$ augmente.

Les corps du premier anneau sont répartis entre $r_{int}$ et $r_{ext}$ : ils n'ont pas tous le même rayon d'orbite.

Les vitesses diffèrent : les corps du bord intérieur sont plus rapides que ceux du bord extérieur.

**COMPRENDRE**
Un anneau ne tourne donc pas comme un disque rigide, où la vitesse augmenterait avec la distance au centre. Chaque morceau est un satellite indépendant.

**17** Déterminer le nombre de tours effectués par la bordure interne du premier anneau, à la distance $r_{int}$, pendant que la bordure externe du dernier anneau, à la distance $R_{ext}$, réalise un tour complet.

**Données utiles** $r_{int} = 6{,}69 \times 10^4$ km ; $R_{ext} = 1{,}36 \times 10^5$ km

La troisième loi de Kepler s'applique aux deux bordures avec la même constante $k$ : $T_{int}^2 = k\,r_{int}^3$ et $T_{ext}^2 = k\,R_{ext}^3$.

$$\frac{T_{ext}^2}{T_{int}^2} = \frac{R_{ext}^3}{r_{int}^3} \quad \text{donc} \quad \frac{T_{ext}}{T_{int}} = \left(\frac{R_{ext}}{r_{int}}\right)^{3/2}$$

Pendant la durée $T_{ext}$ (un tour de la bordure externe), la bordure interne effectue $N = \dfrac{T_{ext}}{T_{int}}$ tours :

$$N = \left(\frac{1{,}36 \times 10^5}{6{,}69 \times 10^4}\right)^{3/2} = 2{,}90$$

$N = 2{,}90$ : la bordure interne effectue près de 3 tours pendant que la bordure externe en fait un.

**PIÈGE**
Élever le rapport des rayons à la puissance $2/3$ au lieu de $3/2$. Contrôle : l'orbite la plus grande a la période la plus longue, donc $N > 1$.

**MÉTHODE**
Deux satellites d'un même astre : faire le rapport des deux lois de Kepler. La constante $k$ disparaît, ni $G$ ni $M_S$ ne sont nécessaires, et les rayons peuvent rester en km.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\left(\frac{1.36 \times 10^5}{6.69 \times 10^4}\right)^{1.5}$$

$\approx 2.898473$