Un saut parfait

Bac 2023 Asie Jour 2 · Exercice 2 **5,5 points** **Durée conseillée 1 h**

1 Déterminer, à partir de la deuxième loi de Newton, les expressions littérales des coordonnées a_x et a_z du vecteur accélération du centre de masse G du skieur.

Système {skieur et son équipement}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, alors que l'axe (Oz) est orienté vers le haut :

$a_x = 0$ et $a_z = -g$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de a_z : l'axe (Oz) monte, $\vec{g}$ descend. Sans système ni référentiel annoncés, la deuxième loi de Newton n'est pas correctement appliquée.

2 Établir les expressions des coordonnées $v_x(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse, puis montrer que les équations horaires sont $x(t) = V_0\,(\cos\alpha)\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\,(\sin\alpha)\,t + H_0$.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de $a_x = 0$ et $a_z = -g$:

$v_x(t) = C_1$ et $v_z(t) = -g\,t + C_2$.

À $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{V_0}$, de coordonnées $V_0\cos\alpha$ et $V_0\sin\alpha$, donc $C_1 = V_0\cos\alpha$ et $C_2 = V_0\sin\alpha$:

$$v_x(t) = V_0\cos\alpha \qquad v_z(t) = -g\,t + V_0\sin\alpha$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche à nouveau les primitives :

$x(t) = V_0\,(\cos\alpha)\,t + C_3$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\,(\sin\alpha)\,t + C_4$.

À $t = 0$, G est en A : $x(0) = 0$ et $z(0) = H_0$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = H_0$.

$x(t) = V_0\,(\cos\alpha)\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\,(\sin\alpha)\,t + H_0$

PIÈGE
Oublier la constante H_0 : le skieur ne part pas de l'origine du repère, mais du point A situé à la hauteur H_0.

MÉTHODE
Deux intégrations successives, et après chacune une constante fixée par la condition initiale : la vitesse initiale pour $\vec{v}$, la position initiale pour $\overrightarrow{OG}$.

3 Préciser la valeur de v_z à la date t_{Hmax} et en déduire que $t_{Hmax} = \dfrac{V_0\sin\alpha}{g}$.

Au sommet C de la trajectoire, le skieur cesse de monter et commence à descendre : le vecteur vitesse y est horizontal, donc $v_z(t_{Hmax}) = 0$.

D'après la question 2 : $-g\,t_{Hmax} + V_0\sin\alpha = 0$, d'où

$t_{Hmax} = \dfrac{V_0\sin\alpha}{g}$

PIÈGE
Écrire que la vitesse est nulle au sommet. Seule la coordonnée verticale s'annule : $v_x = V_0\cos\alpha$ reste constante pendant tout le saut.

4 Préciser si l'on doit augmenter ou diminuer la valeur de l'angle α pour augmenter la valeur de t_{Hmax}.

$t_{Hmax} = \dfrac{V_0\sin\alpha}{g}$ avec V_0 et g fixés : t_{Hmax} est proportionnelle à $\sin\alpha$.

L'angle α est compris entre 0 et 90°, intervalle sur lequel la fonction sinus est croissante.

Pour augmenter t_{Hmax}, il faut **augmenter** l'angle α.

5 Donner une estimation de la durée totale du saut pour une inclinaison de la rampe de 30°.

Données utiles $V_0 = 17\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\alpha = 30^\circ$

D'après l'énoncé, la durée du saut vaut deux fois la durée de la montée : $\Delta t = 2\,t_{Hmax} = \dfrac{2\,V_0 \sin\alpha}{g}$

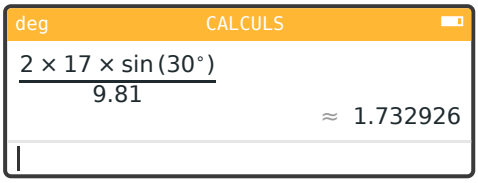
$$\Delta t = \frac{2 \times 17 \times \sin(30^\circ)}{9{,}81} = 1{,}7\ \text{s}$$

$\Delta t \approx 1{,}7\ \text{s}$

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\sin(30)$ donne alors $-0{,}99$ au lieu de $0{,}5$. Ne pas oublier non plus le facteur 2.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme V_0, la donnée la moins précise. La durée réelle de la chute est un peu plus longue : le skieur redescend sous son altitude de départ H_0.

À LA CALCULATRICE



6 Indiquer dans quel intervalle doit théoriquement se trouver l'angle α pour continuer d'augmenter simultanément la hauteur et la portée, tout en permettant un saut d'une hauteur d'au moins 7 m.

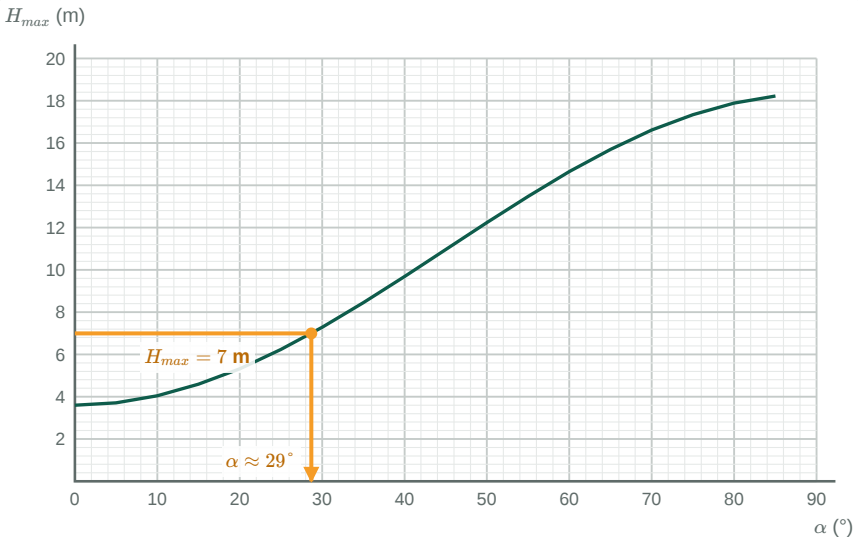
Figure 2 : H_{max} augmente toujours avec α, et vaut 7 m pour $\alpha \approx 29^\circ$. Il faut donc $\alpha \geqslant 29^\circ$ pour atteindre au moins 7 m.

Figure 3 : la portée OB augmente avec α jusqu'à son maximum, atteint pour $\alpha \approx 42^\circ$, puis elle diminue.

La hauteur et la portée augmentent donc ensemble tant que α reste inférieur à 42°.

$29^\circ \leqslant \alpha \leqslant 42^\circ$ environ

COMPRENDRE
Le maximum de portée n'est pas à 45° : ce résultat classique suppose un départ et une arrivée à la même altitude. Ici le skieur part de $H_0 = 3{,}60$ m, ce qui abaisse l'angle optimal.



6 · Figure 2 du sujet : lecture de l'angle donnant $H_{max} = 7$ m

7 Identifier parmi les courbes A, B et C de la figure 4 celles représentant l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie mécanique. Justifier.

$E_p = m\,g\,z$ (avec $E_p = 0$ pour $z = 0$) : le skieur monte puis redescend jusqu'au sol, donc E_p augmente, passe par un maximum, puis décroît jusqu'à zéro. C'est la **courbe B**.

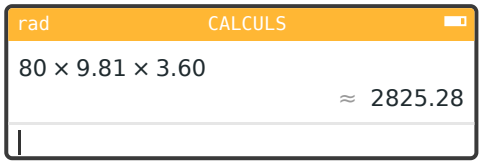
$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$: la vitesse diminue pendant la montée et augmente pendant la descente, donc E_c décroît puis croît. C'est la **courbe A**.

$E_m = E_c + E_p$: la courbe C est à chaque date la somme des deux autres (à $t = 0$: $11{,}6 + 2{,}8 = 14{,}4$ kJ, pour $14{,}3$ kJ lu). C'est la **courbe C**.

A : énergie cinétique ; B : énergie potentielle de pesanteur ; C : énergie mécanique.

MÉTHODE
Pour vérifier l'attribution, contrôler une valeur : à $t = 0$, $E_p = m\,g\,H_0 = 80 \times 9{,}81 \times 3{,}60 \approx 2{,}8$ kJ, ce qui est bien le premier point de la courbe B.

À LA CALCULATRICE



8 Expliquer en quoi les résultats expérimentaux permettent de considérer que l'action de l'air sur le skieur n'est pas négligeable.

Si le poids était la seule force, l'énergie mécanique se conserverait : la courbe C serait horizontale.

Or E_m diminue tout au long du saut : elle passe d'environ 14,3 kJ à environ 10,1 kJ, soit une perte proche de 30 %.

Cette diminution est due au travail résistant d'une force non conservative : la force de frottement de l'air.

L'énergie mécanique diminue nettement : l'action de l'air n'est pas négligeable.

PIÈGE
Se contenter de « la courbe C décroît ». Il faut relier cette baisse à la non-conservation de E_m, donc à l'existence d'une force non conservative qui travaille.

9 Estimer la valeur de l'altitude maximale H_{max} du centre de masse du skieur.

Données utiles $m = 80$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; maximum de la courbe B : $E_{p,max} \approx 5{,}6$ kJ

L'altitude est maximale quand l'énergie potentielle de pesanteur est maximale. Sur la courbe B : $E_{p,max} \approx 5{,}6\ \text{kJ} = 5{,}6 \times 10^3$ J.

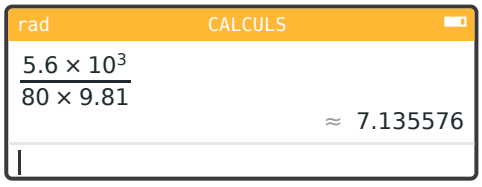
$E_{p,max} = m\,g\,H_{max}$, donc $H_{max} = \dfrac{E_{p,max}}{m\,g}$

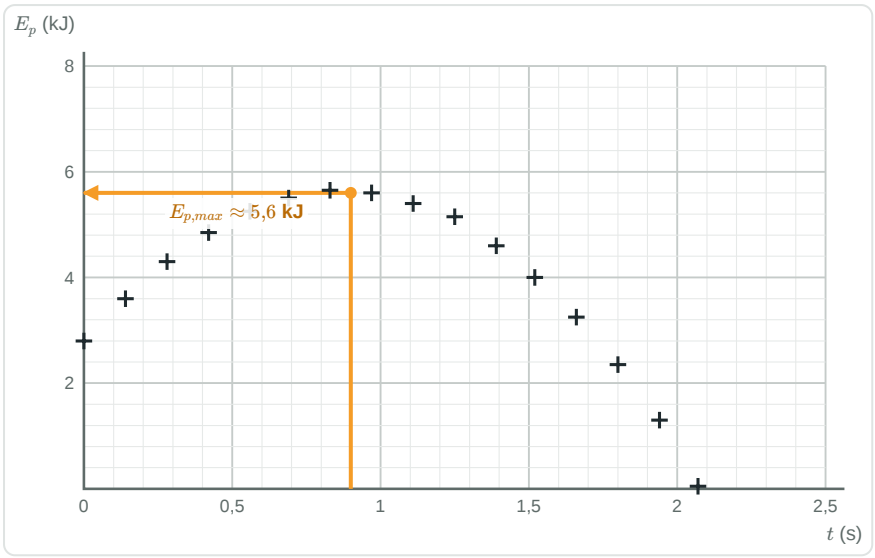
$$H_{max} = \frac{5{,}6 \times 10^3}{80 \times 9{,}81} = 7{,}1\ \text{m}$$

$H_{max} \approx 7{,}1$ m

PIÈGE
Laisser l'énergie en kilojoules : on obtiendrait $7{,}1 \times 10^{-3}$ m. L'énergie doit être en joules pour une altitude en mètres.

À LA CALCULATRICE





9 · Courbe B de la figure 4 (points relevés) : lecture du maximum de E_p

10 À partir de résultats expérimentaux tirés de la figure 4 et de l'étude théorique de la partie A, estimer la portée du saut enregistré, en précisant s'il s'agit d'une estimation par excès ou par défaut.

Données utiles $V_0 = 17\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $H_{max} \approx 7{,}1$ m (Q9) ; figures 2 et 4

Angle de la rampe. Sur la figure 2, la hauteur $H_{max} \approx 7{,}1$ m (question 9) correspond à $\alpha \approx 29^\circ$.

Durée du saut. Sur la figure 4, E_p s'annule, donc $z = 0$: le skieur touche le sol à la date $t_B \approx 2{,}07$ s.

Portée. D'après la question 2, $OB = x(t_B) = V_0 \, (\cos \alpha) \, t_B$

$$OB = 17 \times \cos(29^\circ) \times 2{,}07 = 31 \text{ m}$$

La figure 3 donne une valeur voisine pour $\alpha \approx 29^\circ$ (environ 30 m) : les deux lectures sont cohérentes.

Excès ou défaut. L'équation $x(t)$ suppose l'absence de frottements : la vitesse horizontale y reste égale à $V_0 \cos \alpha$. En réalité l'air freine le skieur (question 8), qui avance moins vite et va donc moins loin.

$OB \approx 31$ m : estimation **par excès** de la portée réelle.

COMPRENDRE

Les lectures graphiques limitent la précision à deux chiffres significatifs. Avec $\alpha = 28^\circ$ ou $t_B = 2{,}1$ s, on trouve 31 à 32 m : l'ordre de grandeur compte plus que le dernier chiffre.

MÉTHODE

Question ouverte : annoncer la démarche, dire d'où vient chaque valeur (figure, question), calculer, puis critiquer le modèle. Une lecture directe de la figure 3 pour $\alpha \approx 29^\circ$ est une autre démarche acceptable.

À LA CALCULATRICE

