Mouvement d'une goutte d'encre dans une imprimante à jet d'encre

Bac 2023 Réunion Jour 2 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 56**

A.1 Donner l'unité de la capacité d'un condensateur dans le système international (SI).

La capacité C s'exprime en **farad**, de symbole F.

A.2 Montrer que les graphiques des figures 4 et 5 respectent la relation 1 : $C = k \times \dfrac{S}{d}$.

Données utiles figure 4 : $d = 5$ mm, coefficient directeur $a = 1{,}76 \times 10^{-9}$ SI ; figure 5 : $S = 200\ \text{mm}^2 = 2{,}00 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$, coefficient directeur $a' = 1{,}7 \times 10^{-15}$ SI

D'après la relation 1, C doit être proportionnelle à S quand d est fixée, et proportionnelle à $\dfrac{1}{d}$ quand S est fixée, avec la même constante k.

Figure 4 (d fixée). Les points sont alignés. Les axes ne partent pas de zéro, on teste donc le quotient $\dfrac{C}{S}$:

- $S = 1{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$, $C = 1{,}8 \times 10^{-13}$ F : $\dfrac{C}{S} = 1{,}8 \times 10^{-9}$ SI ;
- $S = 2{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$, $C = 4{,}4 \times 10^{-13}$ F : $\dfrac{C}{S} = 1{,}8 \times 10^{-9}$ SI ;
- $S = 4{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$, $C = 7{,}0 \times 10^{-13}$ F : $\dfrac{C}{S} = 1{,}8 \times 10^{-9}$ SI.

Le quotient est constant et égal au coefficient directeur : la droite passe par l'origine, $C = a \times S$ avec $a = \dfrac{k}{d}$.

$k = a \times d = 1{,}76 \times 10^{-9} \times 5 \times 10^{-3} = 8{,}8 \times 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$

Figure 5 (S fixée). Les points sont alignés. On teste le produit $C \times d$, c'est-à-dire C divisée par $\dfrac{1}{d}$:

- $\dfrac{1}{d} = 100\ \text{m}^{-1}$, $C = 1{,}8 \times 10^{-13}$ F : $C \times d = 1{,}8 \times 10^{-15}$ SI ;
- $\dfrac{1}{d} = 250\ \text{m}^{-1}$, $C = 4{,}4 \times 10^{-13}$ F : $C \times d = 1{,}8 \times 10^{-15}$ SI ;
- $\dfrac{1}{d} = 500\ \text{m}^{-1}$, $C = 8{,}9 \times 10^{-13}$ F : $C \times d = 1{,}8 \times 10^{-15}$ SI.

Le produit est constant et proche du coefficient directeur indiqué : $C = a' \times \dfrac{1}{d}$ avec $a' = k \times S$.

$k = \dfrac{a'}{S} = \dfrac{1{,}7 \times 10^{-15}}{2{,}00 \times 10^{-4}} = 8{,}5 \times 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$

Les deux valeurs de k s'accordent à moins de 4 % près, ce qui est compatible avec la précision des lectures.

C est proportionnelle à S et à $\dfrac{1}{d}$, avec la même constante $k \approx 9 \times 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$: les deux graphiques respectent la relation 1.

PIÈGE
Écrire « c'est une droite, donc c'est proportionnel ». Les axes commencent à 1 et à 100 : l'origine n'est pas visible. Il faut prouver que la droite y passe, par un quotient constant ou une ordonnée à l'origine négligeable.

COMPRENDRE
Vérification croisée : pour $S = 2{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$ et $d = 5$ mm (soit $\dfrac{1}{d} = 200\ \text{m}^{-1}$), les deux figures donnent la même capacité, $3{,}5 \times 10^{-13}$ F.

MÉTHODE
Tester une proportionnalité sans voir l'origine : calculer le quotient ordonnée/abscisse pour trois points éloignés. S'il est constant et égal au coefficient directeur, la droite passe par l'origine.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{1.8 \times 10^{-13}}{1.0 \times 10^{-4}} \approx 1.8 \times 10^{-9}$

$\dfrac{4.4 \times 10^{-13}}{2.5 \times 10^{-4}} \approx 1.76 \times 10^{-9}$

$\dfrac{7.0 \times 10^{-13}}{4.0 \times 10^{-4}} \approx 1.75 \times 10^{-9}$

$1.76 \times 10^{-9} \times 5 \times 10^{-3} \approx 8.8 \times 10^{-12}$

$\dfrac{4.4 \times 10^{-13}}{250} \approx 1.76 \times 10^{-15}$

$\dfrac{8.9 \times 10^{-13}}{500} \approx 1.78 \times 10^{-15}$

$\dfrac{1.7 \times 10^{-15}}{2.00 \times 10^{-4}} \approx 8.5 \times 10^{-12}$

B.1.1 Vérifier quantitativement que l'hypothèse de négliger le poids de la goutte devant la force électrostatique est justifiée.

Données utiles $V = 1{,}5 \times 10^{-14}\ \text{m}^3$; $\rho = 9{,}5 \times 10^{2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $q = -2{,}0 \times 10^{-13}$ C ; $U = 3{,}0$ kV ; $d = 5{,}0$ mm ; $E = \dfrac{U}{d}$

Masse de la goutte : $m = \rho \times V = 9{,}5 \times 10^{2} \times 1{,}5 \times 10^{-14} = 1{,}4 \times 10^{-11}$ kg.

Poids : $P = m \times g = \rho \times V \times g$

$P = 9{,}5 \times 10^{2} \times 1{,}5 \times 10^{-14} \times 9{,}8 = 1{,}4 \times 10^{-10}$ N

Force électrostatique : $F_e = |q| \times E = \dfrac{|q| \times U}{d}$

$F_e = \dfrac{2{,}0 \times 10^{-13} \times 3{,}0 \times 10^{3}}{5{,}0 \times 10^{-3}} = 1{,}2 \times 10^{-7}$ N

$\dfrac{F_e}{P} = \dfrac{1{,}2 \times 10^{-7}}{1{,}4 \times 10^{-10}} = 8{,}6 \times 10^{2}$: la force électrostatique est environ 900 fois plus grande que le poids, qui est donc négligeable.

PIÈGE
Oublier les conversions : $U = 3{,}0 \times 10^{3}$ V et $d = 5{,}0 \times 10^{-3}$ m. Une valeur de force est positive : on utilise $|q|$, pas q.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme toutes les données. « Quantitativement » demande un rapport chiffré : on néglige une grandeur devant une autre quand elle est au moins cent fois plus petite.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$9.5 \times 10^{2} \times 1.5 \times 10^{-14} \approx 1.425 \times 10^{-11}$

$9.5 \times 10^{2} \times 1.5 \times 10^{-14} \times 9.8 \approx 1.3965 \times 10^{-10}$

$\dfrac{2.0 \times 10^{-13} \times 3.0 \times 10^{3}}{5.0 \times 10^{-3}} \approx 1.2 \times 10^{-7}$

$\dfrac{1.2 \times 10^{-7}}{1.3965 \times 10^{-10}} \approx 859.2911$

B.1.2 Compléter le schéma de l'annexe en représentant, sans souci d'échelle, le champ électrostatique $\vec{E}$ et la force électrostatique $\overrightarrow{F_e}$ subie par la goutte au point M. Justifier l'orientation de chaque vecteur.

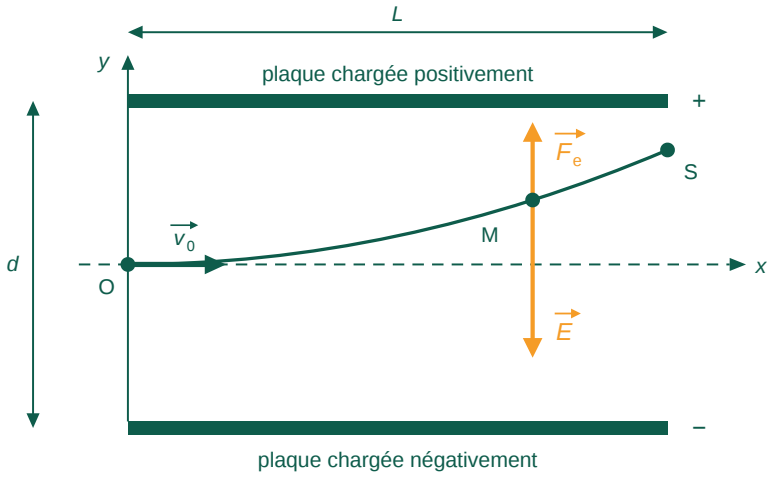
Champ $\vec{E}$: dans un condensateur plan, il est perpendiculaire aux armatures et orienté de la plaque chargée positivement vers la plaque chargée négativement. Ici il est vertical, dirigé vers le bas.

Force $\overrightarrow{F_e}$: $\overrightarrow{F_e} = q \times \vec{E}$ avec $q < 0$, donc la force est de sens opposé au champ. Elle est verticale, dirigée vers le haut, vers la plaque positive.

$\vec{E}$ vertical vers le bas (de la plaque + vers la plaque −) ; $\overrightarrow{F_e}$ verticale vers le haut, car $q < 0$.

PIÈGE
Tracer la force tangente à la trajectoire. Elle est verticale en tout point, car le champ est uniforme : même direction, même sens, même valeur partout entre les plaques.

COMPRENDRE
Contrôle de cohérence : la goutte, négative, est attirée par la plaque positive, et la trajectoire de la figure 6 se courbe bien vers le haut, dans le sens de la force.



B.1.2 · Annexe complétée : champ et force au point M (tracés de l'élève en orange)

B.1.3 Déterminer la valeur de la capacité C du condensateur plan de charge q_C soumis à la tension électrique U.

Données utiles $q_C = 1{,}0$ nC ; $U = 3{,}0$ kV

La charge d'un condensateur est proportionnelle à la tension à ses bornes : $q_C = C \times U$, donc $C = \dfrac{q_C}{U}$.

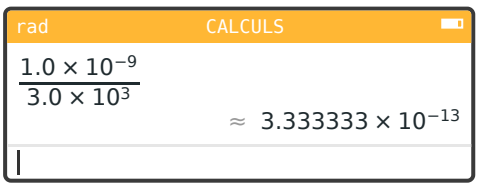
$$C = \frac{1{,}0 \times 10^{-9}}{3{,}0 \times 10^{3}}$$

$C = 3{,}3 \times 10^{-13}$ F

PIÈGE
Deux conversions : $1\ \text{nC} = 10^{-9}$ C et $1\ \text{kV} = 10^{3}$ V. Ne pas confondre la charge q_C du condensateur avec la charge q de la goutte.

COMPRENDRE
Cette valeur est du même ordre de grandeur que celles des figures 4 et 5 (quelques 10^{-13} F), ce qui confirme sa vraisemblance.

À LA CALCULATRICE



B.1.4.1 Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de la goutte d'encre.

Système {goutte d'encre}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force prise en compte : $\overrightarrow{F_e} = q\,\vec{E}$ (poids et frottements négligés).

Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $q\,\vec{E} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \dfrac{q}{m}\,\vec{E}$.

Le champ est vertical vers le bas : $\vec{E} = -E\,\vec{j} = -\dfrac{U}{d}\,\vec{j}$. D'où

$$a_x = 0 \qquad a_y = -\frac{q\,U}{m\,d}$$

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives : $v_x = k_1$ et $v_y = -\dfrac{q\,U}{m\,d}\,t + k_2$.

À $t = 0$, $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{i}$, donc $k_1 = v_0$ et $k_2 = 0$:

$$v_x = v_0 \qquad v_y = -\frac{q\,U}{m\,d}\,t$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, on cherche de nouveau les primitives : $x = v_0\,t + k_3$ et $y = -\dfrac{q\,U}{2\,m\,d}\,t^2 + k_4$.

À $t = 0$, la goutte est en O : $k_3 = 0$ et $k_4 = 0$.

$$x(t) = v_0\,t \qquad y(t) = -\frac{q\,U}{2\,m\,d}\,t^2$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » dans a_y. Le champ est dirigé selon $-\vec{j}$; comme $q < 0$, on a bien $a_y > 0$: la goutte est accélérée vers le haut.

MÉTHODE
Toujours la même démarche : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection, puis deux recherches de primitives. Chaque constante se détermine avec les conditions initiales (vitesse, puis position).

B.1.4.2 En déduire l'équation de la trajectoire de la goutte dans le condensateur, que le sujet écrit $y(x) = \dfrac{q \times U}{2 \times m \times d \times v_0^2} \times x^2$.

On isole le temps dans $x(t) = v_0\,t$: $t = \dfrac{x}{v_0}$.

On remplace dans $y(t)$:

$$y = -\frac{q\,U}{2\,m\,d} \times \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

La trajectoire est une portion de parabole. On retrouve l'expression de l'énoncé au signe près : le sujet a omis le signe « $-$ ».

$$y(x) = -\frac{q \times U}{2 \times m \times d \times v_0^2} \times x^2$$ (expression attendue, avec un signe « $-$ » qui manque dans le sujet)

PIÈGE
Ne pas modifier son calcul pour retrouver à tout prix la formule imprimée. On garde son résultat, et on signale l'écart en une phrase justifiée.

COMPRENDRE
Le signe « $-$ » est nécessaire : avec $q < 0$, l'expression du sujet donnerait $y < 0$, soit une goutte déviée vers le bas, contrairement à la figure 6. La formule de Y donnée en B.2.2.2 porte d'ailleurs bien ce signe.

B.1.4.3 Donner l'expression de l'ordonnée y_S de la goutte à la sortie S du condensateur.

Au point S, la goutte a parcouru toute la longueur des armatures : $x_S = L$. On remplace x par L dans l'équation de la trajectoire.

$$y_S = -\frac{q \times U \times L^2}{2 \times m \times d \times v_0^2}$$

COMPRENDRE
Aucune valeur n'est demandée. Le calcul donne $y_S \approx 1{,}9$ mm, inférieur à $\dfrac{d}{2} = 2{,}5$ mm : la goutte sort du condensateur sans toucher la plaque supérieure.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{2.0\times10^{-13}\times3.0\times10^{3}\times(20\times10^{-3})^{2}}{2\times1.425\times10^{-11}\times5.0\times10^{-3}\times30^{2}} \approx 0.001871345$$

B.2.1 Justifier que la goutte suit un mouvement rectiligne uniforme entre le condensateur plan et la feuille.

Après la sortie du condensateur, la goutte n'est soumise à aucune force (poids négligé) : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

D'après le principe d'inertie (première loi de Newton), dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le vecteur vitesse de la goutte est alors constant.

$\vec{v}$ est constant en direction, en sens et en valeur : le mouvement est **rectiligne uniforme**.

COMPRENDRE
La goutte garde le vecteur vitesse qu'elle avait en S. Elle part donc en ligne droite selon la tangente à la parabole en S, inclinée de l'angle α sur l'axe (Ox).

B.2.2.1 Exprimer $\tan\alpha$ en fonction de O'Y et O'I d'une part, et en fonction de SH et HI d'autre part.

Dans le triangle IO'Y, rectangle en O' : $\tan\alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{\text{O'Y}}{\text{O'I}}$.

Dans le triangle IHS, rectangle en H, l'angle en I est le même : $\tan\alpha = \dfrac{\text{SH}}{\text{HI}}$.

$$\tan\alpha = \frac{\text{O'Y}}{\text{O'I}} = \frac{\text{SH}}{\text{HI}}$$

COMPRENDRE
Les points I, S et Y sont alignés, car la goutte va en ligne droite après S. Les deux triangles rectangles ont donc le même angle α au sommet I.

B.2.2.2 En déduire que l'ordonnée Y du point d'impact de la goutte sur la feuille a pour expression $Y = -\dfrac{q\times U\times L}{m\times d\times v_0^2}\times\left(\dfrac{L}{2}+D\right)$.

Données utiles y_S (B.1.4.3) ; I milieu de [OH]

On lit les longueurs sur la figure 7 :

- $\text{O'Y} = Y$ et $\text{SH} = y_S$;
- I est le milieu de [OH] et $\text{OH} = L$, donc $\text{HI} = \dfrac{L}{2}$;
- $\text{O'I} = \text{IH} + \text{HO'} = \dfrac{L}{2} + D$.

L'égalité de B.2.2.1 donne $\dfrac{Y}{\frac{L}{2}+D} = \dfrac{y_S}{\frac{L}{2}}$, donc $Y = \dfrac{2\,y_S}{L}\times\left(\dfrac{L}{2}+D\right)$.

Avec $y_S = -\dfrac{q\,U\,L^2}{2\,m\,d\,v_0^2}$: $\dfrac{2\,y_S}{L} = -\dfrac{q\,U\,L}{m\,d\,v_0^2}$

$$Y = -\frac{q\times U\times L}{m\times d\times v_0^2}\times\left(\frac{L}{2}+D\right)$$: c'est l'expression attendue.

MÉTHODE
Pour un « en déduire », partir du résultat précédent, traduire chaque longueur de la figure par une grandeur de l'énoncé, puis isoler l'inconnue avant de remplacer y_S par son expression.

B.2.2.3 Déterminer dans quelle zone de la feuille (zone 1, 2 ou 3 de la figure 8) la goutte va se déposer.

Données utiles $m = \rho \times V = 1{,}425 \times 10^{-11}$ kg (B.1.1) ; $q = -2{,}0 \times 10^{-13}$ C ; $U = 3{,}0$ kV ; $L = 20$ mm ; $D = 10$ mm ; $d = 5{,}0$ mm ; $v_0 = 30\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; hauteur de la feuille : 29,7 cm

$$Y = -\frac{q\,U\,L}{m\,d\,v_0^2} \times \left(\frac{L}{2} + D\right)$$

Avec $\frac{L}{2} + D = 10 + 10 = 20\ \text{mm} = 2{,}0 \times 10^{-2}$ m :

$$Y = -\frac{-2{,}0 \times 10^{-13} \times 3{,}0 \times 10^{3} \times 20 \times 10^{-3}}{1{,}425 \times 10^{-11} \times 5{,}0 \times 10^{-3} \times 30^2} \times 2{,}0 \times 10^{-2}$$

$Y = 3{,}7 \times 10^{-3}$ m, soit 3,7 mm au-dessus du centre O' de la feuille.

Les trois zones ont la même hauteur : $\frac{29{,}7}{3} = 9{,}90$ cm. La zone 2, centrée sur O', s'étend de $-4{,}95$ cm à $+4{,}95$ cm.

$Y = 0{,}37$ cm, compris entre $-4{,}95$ cm et $+4{,}95$ cm : la goutte se dépose dans la **zone 2**.

PIÈGE

Toutes les longueurs en mètres (L, D, d), la tension en volts, et la masse non arrondie ($1{,}425 \times 10^{-11}$ kg). Les deux signes « $-$ » (celui de la formule et celui de q) donnent bien $Y > 0$.

COMPRENDRE

La limite de la zone 2 n'est pas à 9,90 cm de O' mais à la moitié, 4,95 cm, car O' est au centre de la feuille, donc au milieu de la zone 2.

À LA CALCULATRICE

