Extraction du gaz de schiste par électro-fracturation

Bac 2023 Réunion Jour 1 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

A.1 Établir la relation entre la tension $u_{C,eq}$ aux bornes du condensateur équivalent, la tension u_{R_1} aux bornes du conducteur ohmique et la tension E de l'alimentation.

Interrupteur en position 1 : la maille contient le générateur, le condensateur équivalent et le conducteur ohmique R_1. Avec les flèches de tension de la figure 2, la loi des mailles donne :

$$E = u_{R_1} + u_{C,eq}$$

COMPRENDRE
En position 1, la branche de R_2 est ouverte : aucun courant n'y circule, elle n'intervient pas dans la charge.

A.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_{C,eq}$ lors de la charge.

Loi d'Ohm : $u_{R_1} = R_1\, i$.

Pour le condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C_{eq}\, u_{C,eq}$, avec C_{eq} constante, donc $i = C_{eq}\, \dfrac{\mathrm{d}u_{C,eq}}{\mathrm{d}t}$.

On reporte dans la loi des mailles (A.1) : $E = R_1 C_{eq}\, \dfrac{\mathrm{d}u_{C,eq}}{\mathrm{d}t} + u_{C,eq}$, soit

$$\frac{\mathrm{d}u_{C,eq}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_1 C_{eq}}\, u_{C,eq} = \frac{E}{R_1 C_{eq}}$$

MÉTHODE
Circuit RC, toujours trois étapes : loi des mailles, loi d'Ohm, puis $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. On termine en isolant la dérivée, coefficient 1 devant elle.

A.3 Vérifier que $u_{C,eq}(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau_{charge}}\right)$ est solution de cette équation différentielle et exprimer τ_{charge} en fonction de R_1 et C_{eq}.

On dérive la fonction proposée : $\dfrac{\mathrm{d}u_{C,eq}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{\tau_{charge}}\, e^{-t/\tau_{charge}}$.

On remplace dans le membre de gauche de l'équation (A.2) :

$$\frac{E}{\tau_{charge}}\, e^{-t/\tau_{charge}} + \frac{E}{R_1 C_{eq}}\left(1 - e^{-t/\tau_{charge}}\right)$$
$$= \frac{E}{R_1 C_{eq}} + E\, e^{-t/\tau_{charge}}\left(\frac{1}{\tau_{charge}} - \frac{1}{R_1 C_{eq}}\right)$$

Ce membre est égal à $\dfrac{E}{R_1 C_{eq}}$ à tout instant si et seulement si $\dfrac{1}{\tau_{charge}} - \dfrac{1}{R_1 C_{eq}} = 0$.

De plus $u_{C,eq}(0) = E\,(1-1) = 0$: le condensateur est bien déchargé à $t = 0$.

La fonction proposée est solution, avec $\tau_{charge} = R_1\, C_{eq}$

PIÈGE
Oublier le signe en dérivant : la dérivée de $-e^{-t/\tau}$ est $+\dfrac{1}{\tau}\, e^{-t/\tau}$. Une erreur de signe ici empêche les exponentielles de se simplifier.

A.4 Déterminer la capacité C_{eq} du condensateur équivalent, en faisant apparaître la démarche sur la courbe 1 de l'annexe.

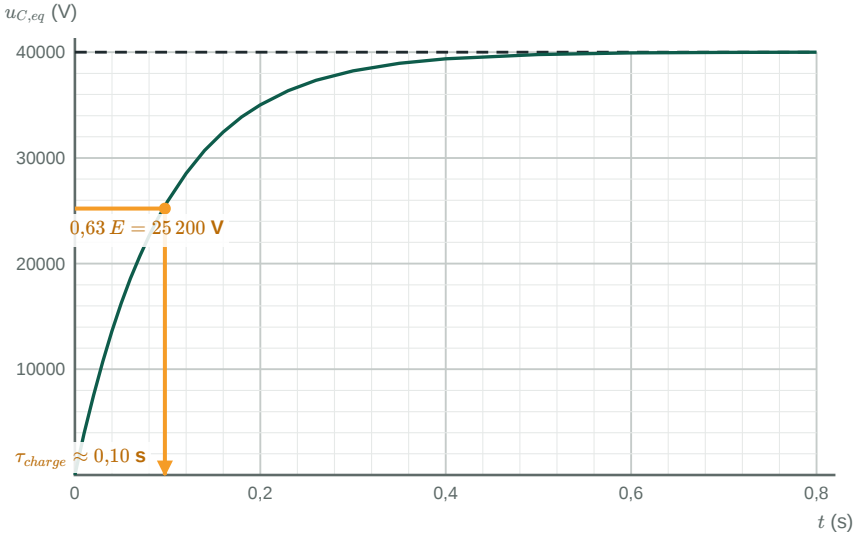
Données utiles $E = 40$ kV ; $R_1 = 160$ kΩ ; $\tau_{charge} = R_1 C_{eq}$ (A.3) ; courbe 1 de l'annexe

À $t = \tau_{charge}$: $u_{C,eq} = E\,(1 - e^{-1}) = 0{,}63\,E = 0{,}63 \times 40\,000 = 25\,200$ V.

Sur la courbe 1, on trace l'horizontale d'ordonnée 25 200 V : elle coupe la courbe à l'abscisse $\tau_{charge} \approx 0{,}10$ s.

Comme $\tau_{charge} = R_1 C_{eq}$: $\quad C_{eq} = \dfrac{\tau_{charge}}{R_1} = \dfrac{0{,}10}{160 \times 10^3}$

$C_{eq} = 6{,}3 \times 10^{-7}$ F, soit environ $0{,}6\ \mu$F



A.4 · Courbe 1 de l'annexe complétée : asymptote à E et lecture de τ_{charge} à 63 % de E

PIÈGE
Laisser R_1 en kΩ. Avec $R_1 = 160 \times 10^3$ Ω et τ_{charge} en secondes, la capacité sort en farads.

COMPRENDRE
La lecture graphique de τ_{charge} ne donne que deux chiffres significatifs : le résultat est arrondi à deux chiffres. Autre tracé accepté : la tangente à l'origine coupe l'asymptote $u = E$ à l'abscisse τ_{charge}.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$0.63 \times 40\,000$ ≈ 25200
$\dfrac{0.10}{160 \times 10^3}$ ≈ 6.25×10^{-7}

A.5 En déduire le nombre de condensateurs de capacité $C = 200$ nF utilisés lors de l'expérimentation.

Données utiles $C = 200$ nF ; $C_{eq} = 6{,}3 \times 10^{-7}$ F (A.4)

Le condensateur équivalent regroupe N condensateurs identiques, donc $C_{eq} = N \times C$ avec N entier compris entre 1 et 6.

$N = \dfrac{C_{eq}}{C} = \dfrac{6{,}3 \times 10^{-7}}{200 \times 10^{-9}} = 3{,}1$, valeur la plus proche de l'entier 3.

L'expérimentation utilise $N = 3$ condensateurs, soit $C_{eq} = 3 \times 200 = 600$ nF.

COMPRENDRE
L'écart entre 3,1 et 3 vient de la lecture graphique : avec 600 nF, $\tau_{charge} = 160 \times 10^3 \times 600 \times 10^{-9} = 0{,}096$ s, indiscernable de 0,10 s sur la courbe.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS
$\dfrac{6.3 \times 10^{-7}}{200 \times 10^{-9}}$ ≈ 3.15

A.6 Déterminer l'énergie maximale W_{max} stockée dans le condensateur équivalent chargé.

Données utiles $W = \frac{1}{2} C u_C^2$; $C_{eq} = 600$ nF (A.5) ; $E = 40$ kV

En fin de charge, la tension atteint sa valeur maximale $u_{C,eq} = E$ (asymptote de la courbe 1).

$$W_{max} = \frac{1}{2} C_{eq} E^2 = \frac{1}{2} \times 600 \times 10^{-9} \times (40 \times 10^3)^2$$

$$\boxed{W_{max} = 4{,}8 \times 10^2 \text{ J}}$$

PIÈGE
Garder 40 kV et 600 nF sans les convertir, ou oublier le carré sur la tension.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.5 \times 600 \times 10^{-9} \times (40 \times 10^3)^2 \approx 480$

B.1 Déterminer la valeur de la tension $u_{C,eq}(t = \Delta t)$ aux bornes du condensateur équivalent à la fin de la pré-décharge.

Données utiles $u_{C,eq}(t) = E\, e^{-t/(R_2 C_{eq})}$; $E = 40$ kV ; $\Delta t = 12\ \mu$s ; $R_2 = 100\ \Omega$; $C_{eq} = 600$ nF

$u_{C,eq}(\Delta t) = E\, e^{-\frac{\Delta t}{R_2 C_{eq}}}$ avec $R_2 C_{eq} = 100 \times 600 \times 10^{-9} = 6{,}0 \times 10^{-5}$ s.

$$u_{C,eq}(\Delta t) = 40 \times 10^3 \times e^{-\frac{12 \times 10^{-6}}{6{,}0 \times 10^{-5}}} = 40 \times 10^3 \times e^{-0{,}20}$$

$$\boxed{u_{C,eq}(\Delta t) = 3{,}3 \times 10^4 \text{ V} = 33 \text{ kV}}$$

COMPRENDRE
La pré-décharge dure 12 μs, soit un cinquième du temps caractéristique $R_2 C_{eq} = 60\ \mu$s : la tension baisse peu, d'environ 18 %.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$100 \times 600 \times 10^{-9} \approx 6 \times 10^{-5}$

$40 \times 10^3 \times e^{\frac{-12 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-5}}} \approx 32749.23$

B.2 En déduire la valeur de l'énergie restante W_{arc} dans le condensateur équivalent, disponible pour la création de l'arc électrique.

Données utiles $C_{eq} = 600$ nF ; $u_{C,eq}(\Delta t) = 3{,}27 \times 10^4$ V (B.1, valeur non arrondie)

$$W_{arc} = \frac{1}{2} C_{eq}\, u_{C,eq}(\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \times 600 \times 10^{-9} \times (3{,}27 \times 10^4)^2$$

$$\boxed{W_{arc} = 3{,}2 \times 10^2 \text{ J}}$$

PIÈGE
Calculer avec la valeur arrondie 33 kV : on obtient 327 J au lieu de 322 J, car le carré amplifie l'erreur d'arrondi. On garde la valeur complète en mémoire.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.5 \times 600 \times 10^{-9} \times (40 \times 10^3 \times e^{-0.2})^2 \approx 321.7536$

B.3 Calculer le rendement énergétique η de l'installation permettant la création de l'arc électrique. Commenter.

Données utiles $\eta = \dfrac{E_{utile}}{E_{consommée}}$; $W_{max} = 480$ J (A.6) ; $W_{arc} = 322$ J (B.2)

L'énergie utile est celle disponible pour l'arc, W_{arc} ; l'énergie consommée est celle stockée en fin de charge, W_{max}.

$$\eta = \frac{W_{arc}}{W_{max}} = \frac{322}{480}$$

$\eta = 0{,}67$, soit $67\ \%$

Commentaire : environ un tiers de l'énergie stockée est perdu pendant la pré-décharge, dissipé par effet Joule dans le système {électrodes + eau} avant l'apparition de l'arc. Le rendement reste correct, mais il diminuerait encore si la pré-décharge durait plus longtemps.

COMPRENDRE

Littéralement, $\eta = \left(\dfrac{u_{C,eq}(\Delta t)}{E}\right)^2 = e^{-2\Delta t/(R_2 C_{eq})} = e^{-0{,}40}$: le rendement ne dépend que de la durée de la pré-décharge comparée à $R_2 C_{eq}$.

À LA CALCULATRICE

