Le "tweener-lob" ou le coup entre les jambes

Bac 2023 Réunion Jour 1 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

A.1 En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer les coordonnées du vecteur accélération de la balle dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Système {balle}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements étant négligés, la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, dirigé vers le bas, et l'axe (Oy) est orienté vers le haut :

$$\vec{a}\ \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » : $\vec{g}$ est de sens opposé à $\vec{j}$. Ne pas annoncer $\vec{a} = \vec{g}$ sans avoir cité le système, le référentiel et le bilan des forces.

A.2 Déterminer, en détaillant chaque étape, les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ de la balle dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Données utiles à $t = 0$: position $(0\,;y_0)$, vitesse $\vec{v}_0$ inclinée de α sur l'horizontale ; $\vec{a}$ (A.1)

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de a_x et a_y :

$$v_x(t) = C_1 \qquad v_y(t) = -g\,t + C_2$$

À $t = 0$: $v_x(0) = v_0\cos\alpha$ et $v_y(0) = v_0\sin\alpha$, donc $C_1 = v_0\cos\alpha$ et $C_2 = v_0\sin\alpha$.

$$\vec{v}\ \begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = -g\,t + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche de nouveau les primitives :

$$x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t + C_3 \qquad y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0\sin\alpha)\,t + C_4$$

À $t = 0$: $x(0) = 0$ et $y(0) = y_0$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = y_0$.

$$x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0\sin\alpha)\,t + y_0$$

PIÈGE
Oublier y_0 : la balle n'est pas frappée à l'origine du repère, mais à 30,0 cm du sol.

COMPRENDRE
L'énoncé nomme la balle H dans l'introduction puis G dans cette question : il s'agit du même point. On garde G, car H désigne aussi la hauteur du filet.

MÉTHODE
Deux intégrations successives, de $\vec{a}$ à $\vec{v}$ puis de $\vec{v}$ à la position. Après chacune, les constantes se déterminent avec les conditions initiales, écrites explicitement sur la copie.

A.3 En déduire que l'équation de la trajectoire est, en unités du système international, $y = -0{,}047\,x^2 + 1{,}1\,x + 0{,}30$.

Données utiles $v_0 = 55{,}1\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; $\alpha = 48{,}0^\circ$; $y_0 = 30{,}0$ cm ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; équations horaires (A.2)

On élimine le temps : $x = (v_0\cos\alpha)\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$, que l'on reporte dans $y(t)$:

$$y = -\frac{g}{2\,(v_0\cos\alpha)^2}\,x^2 + (\tan\alpha)\,x + y_0$$

Avec $v_0 = \dfrac{55{,}1}{3{,}6} = 15{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $y_0 = 0{,}300$ m :

$$\frac{g}{2\,(v_0\cos\alpha)^2} = \frac{9{,}81}{2\times\left(\dfrac{55{,}1}{3{,}6}\times\cos 48{,}0^\circ\right)^2} =$$

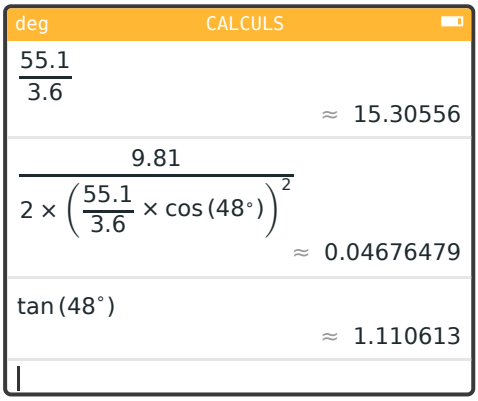
$0{,}0468\ \text{m}^{-1}$ $\qquad \tan 48{,}0^\circ = 1{,}11$

$y = -0{,}0468\,x^2 + 1{,}11\,x + 0{,}300$, soit, avec deux chiffres significatifs, $y = -0{,}047\,x^2 + 1{,}1\,x + 0{,}30$: c'est l'équation attendue.

PIÈGE
Laisser v_0 en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ ou y_0 en cm : l'équation est demandée en unités SI. Vérifier aussi que la calculatrice est en mode degrés.

COMPRENDRE
Les données ont trois chiffres significatifs ; l'énoncé arrondit les coefficients à deux. On garde la valeur non arrondie de v_0 dans la calculatrice pour éviter de cumuler les arrondis.

À LA CALCULATRICE



A.4 L'adversaire est à 3,0 m du filet, le tamis de sa raquette à 4,0 m de hauteur. Déterminer si la balle passe au-dessus de sa raquette.

Données utiles $L = 12{,}0$ m ; équation de la trajectoire (A.3)

L'adversaire est de l'autre côté du filet, à 3,0 m de celui-ci. Son abscisse dans le repère est :

$$x_A = L + 3{,}0 = 12{,}0 + 3{,}0 = 15{,}0\ \text{m}$$

Hauteur de la balle à cette abscisse :

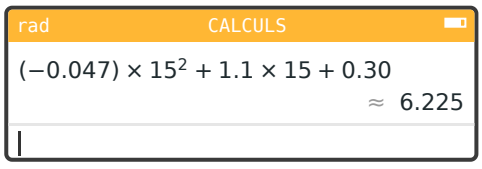
$$y(x_A) = -0{,}047\times 15{,}0^2 + 1{,}1\times 15{,}0 + 0{,}30 = 6{,}2\ \text{m}$$

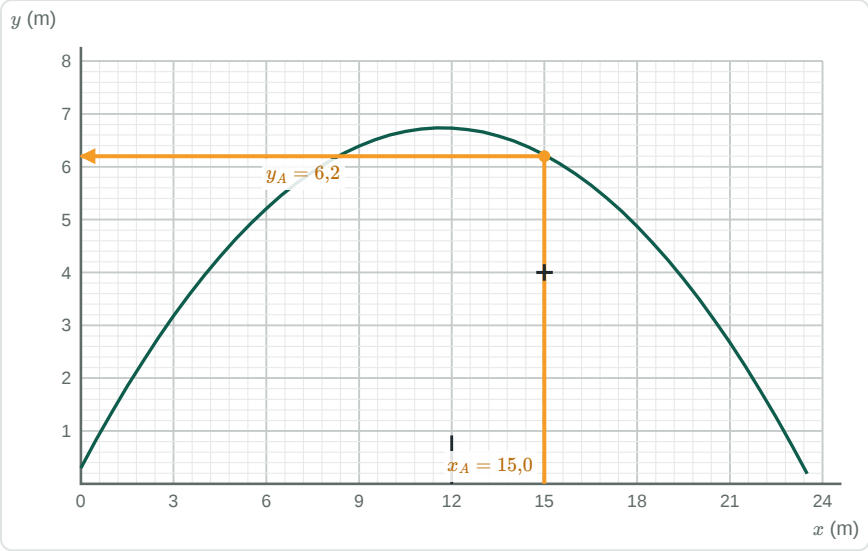
$y(x_A) = 6{,}2\ \text{m} > 4{,}0\ \text{m}$: la balle passe au-dessus de la raquette, avec une marge d'environ 2 m.

PIÈGE
Prendre $x = 3{,}0$ m ou $x = 12{,}0 - 3{,}0 = 9{,}0$ m : l'adversaire joue dans l'autre moitié du terrain, au-delà du filet.

COMPRENDRE
Avec les coefficients non arrondis, on trouve 6,4 m : la conclusion est la même. Une conclusion rédigée, qui compare explicitement les deux hauteurs, est attendue dans cette question à prise d'initiative.

À LA CALCULATRICE





A.4 · Trajectoire de la balle et position de la raquette adverse

B.1 Rappeler la définition de l'énergie mécanique E_m de la balle.

L'énergie mécanique de la balle est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle de pesanteur :

$$E_m = E_c + E_{pp}$$

B.2 Exprimer l'énergie mécanique $E_m(0)$ de la balle à $t = 0$ s en fonction de m, g, v_0 et y_0, puis calculer sa valeur.

Données utiles $m = 58{,}5$ g ; $v_0 = 55{,}1$ km · h^{-1} ; $y_0 = 0{,}300$ m ; $g = 9{,}81$ m · s^{-2}

Avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ et, l'axe étant ascendant et E_{pp} nulle à l'origine, $E_{pp} = m g y$:

$$E_m(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g y_0$$

$$E_m(0) = \frac{1}{2} \times 58{,}5 \times 10^{-3} \times \left(\frac{55{,}1}{3{,}6}\right)^2 + 58{,}5 \times 10^{-3} \times 9{,}81 \times 0{,}300$$

$$E_m(0) = 7{,}02 \text{ J}$$

PIÈGE
Laisser la masse en grammes ou la vitesse en km · h^{-1} : le résultat n'est en joules qu'avec des kilogrammes, des mètres et des m · s^{-1}.

COMPRENDRE
L'énergie cinétique (6,85 J) domine largement l'énergie potentielle (0,17 J) : la balle part vite et de très bas.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$0.5 \times 58.5 \times 10^{-3} \times \left(\frac{55.1}{3.6}\right)^2 + 58.5 \times 10^{-3} \times 9.81 \times 0.300$

$\approx$ 7.024271

B.3 Indiquer sous quelle condition s'applique la conservation de l'énergie mécanique.

L'énergie mécanique se conserve si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives (comme le poids), ou à des forces non conservatives qui ne travaillent pas. Ici, cela revient à négliger les frottements.

B.4 Calculer la vitesse v_f de la balle quand elle retombe au sol. Indiquer, en justifiant, si la valeur réellement mesurée par le radar sera supérieure ou inférieure à celle calculée.

Données utiles $v_0 = 55{,}1\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; $y_0 = 0{,}300\ \text{m}$; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $E_m(0)$ (B.2)

Les frottements sont négligés : la balle n'est soumise qu'à son poids, force conservative, donc E_m se conserve entre la frappe et le sol : $E_m(f) = E_m(0)$.

Au sol, $y = 0$ donc $E_{pp} = 0$:

$$\frac{1}{2}m v_f^2 = \frac{1}{2}m v_0^2 + m g y_0 \quad \text{d'où} \quad v_f = \sqrt{v_0^2 + 2 g y_0}$$

$$v_f = \sqrt{\left(\frac{55{,}1}{3{,}6}\right)^2 + 2 \times 9{,}81 \times 0{,}300} = 15{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

En réalité, les frottements de l'air s'exercent sur la balle. Leur travail est résistant : l'énergie mécanique diminue au cours du mouvement, donc l'énergie cinétique à l'arrivée est plus faible que celle calculée.

$v_f = 15{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (soit $55{,}8\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) ; la valeur mesurée par le radar sera inférieure.

COMPRENDRE

La masse se simplifie : v_f ne dépend pas de m. La balle arrive à peine plus vite qu'au départ, car elle n'est descendue que de 30 cm au total.

MÉTHODE

On peut aussi écrire $v_f = \sqrt{2\,E_m(0)/m}$ avec la valeur de B.2, en utilisant la valeur non arrondie de $E_m(0)$ et la masse en kilogrammes.

À LA CALCULATRICE

