Le street - une pratique olympique

Bac 2023 Amérique du Nord Jour 1 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 35**

Q.1 À l'aide du script Python, nommer en justifiant les énergies E_1, E_2 et E_3, puis les attribuer aux courbes a, b et c.

E_1 est nulle à $t = 0$ (départ sans vitesse) puis augmente comme la vitesse : c'est l'**énergie cinétique** E_c. Tracée avec « 'r+-' » (croix rouges) : **courbe c**.

E_2 diminue comme l'altitude du skateboardeur : c'est l'**énergie potentielle de pesanteur** E_{pp}. Tracée avec « 'go-' » (ronds verts) : **courbe b**.

Ligne 11, $E_3 = E_1 + E_2 = E_c + E_{pp}$: c'est l'**énergie mécanique** E_m. Tracée avec « 'bv-' » (triangles bleus) : **courbe a**.

$E_1 = E_c$ (courbe c) ; $E_2 = E_{pp}$ (courbe b) ; $E_3 = E_m$ (courbe a)

MÉTHODE
Deux indices se recoupent : le sens de variation de chaque liste de valeurs, et le code de tracé de plt.plot (première lettre = couleur, symbole suivant = marqueur) à comparer avec la légende.

Q.2 Interpréter l'évolution temporelle de l'énergie E_3.

Données utiles script : $E_3(0) = 0{,}0 + 588{,}6$ J ; $E_3(1{,}35\ \text{s}) = 540{,}5 + 1{,}6$ J

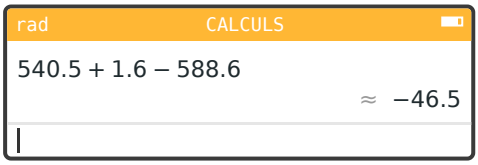
L'énergie mécanique diminue légèrement au cours de la descente : elle passe de $588{,}6$ J en A à $540{,}5 + 1{,}6 = 542{,}1$ J en B. Elle ne se conserve donc pas.

Le système est soumis à une force non conservative qui travaille : la force de frottement $\vec{F}$ des roues sur la piste. Son travail est résistant et $\Delta E_m = W_{AB}(\vec{F})$.

E_m diminue de $46{,}5$ J : cette énergie est dissipée par les frottements $\vec{F}$.

PIÈGE
Répondre seulement « elle diminue ». Interpréter demande la cause : une force non conservative dont le travail est négatif. La réaction normale, perpendiculaire au déplacement, ne travaille pas.

À LA CALCULATRICE



Q.3 Déterminer la valeur de la vitesse atteinte par le skateboardeur au point B.

Données utiles $m = 75{,}0$ kg ; dernière valeur de E_1 : $E_c(B) = 540{,}5$ J

Le point B est atteint à la dernière date du script, où $E_c(B) = 540{,}5$ J.

$$E_c(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 \text{ donc } v_B = \sqrt{\frac{2\,E_c(B)}{m}}$$

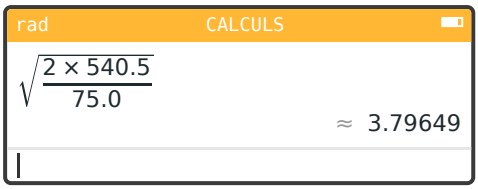
$$v_B = \sqrt{\frac{2 \times 540{,}5}{75{,}0}} = 3{,}80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v_B = 3{,}80\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme la donnée la moins précise (m). Le résultat est cohérent avec la valeur $3{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ donnée en partie B.

COMPRENDRE
Le script imprimé donne 15 dates mais 14 valeurs pour E_1 et E_2 : une valeur manque en début de liste. La dernière ($540{,}5$ J) correspond bien au point B sur le graphique.

À LA CALCULATRICE



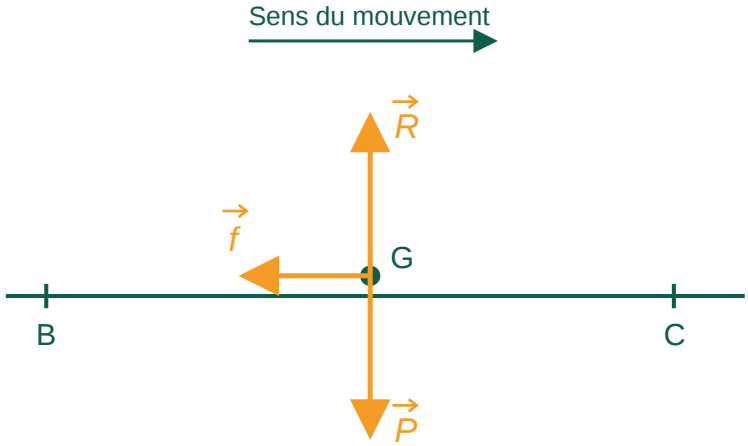
Q.4 Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées au skateboardeur entre B et C et les représenter sans souci d'échelle.

Système {skateboardeur}, référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements de l'air sont négligés. Trois forces :

- le poids $\vec{P}$: vertical, vers le bas ;
- la réaction normale du sol $\vec{R}$: verticale, vers le haut ;
- la force de frottement $\vec{f}$: horizontale, de sens opposé au mouvement.

Trois forces : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{f}$ (schéma ci-contre).

PIÈGE
Ajouter une force « motrice » dans le sens du mouvement : rien ne pousse le skateboardeur entre B et C. Tracer $\vec{P}$ et $\vec{R}$ de même longueur, puisqu'ils se compensent.



Q.4 · Forces appliquées au système entre B et C

Q.5 À l'aide du théorème de l'énergie cinétique appliqué entre B et C, établir la relation entre v_B, m, f et la distance d'arrêt BC.

Théorème de l'énergie cinétique entre B et C :

$$E_c(C) - E_c(B) = W_{BC}(\vec{P}) + W_{BC}(\vec{R}) + W_{BC}(\vec{f})$$

- $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont perpendiculaires au déplacement : leur travail est nul ;
- $\vec{f}$ est opposée au déplacement : $W_{BC}(\vec{f}) = f \times BC \times \cos(180^\circ) = -f \times BC$;
- le skateboardeur s'arrête en C : $E_c(C) = 0$.

Donc $0 - \frac{1}{2} m v_B^2 = -f \times BC$

$\frac{1}{2} m v_B^2 = f \times BC$, soit $BC = \frac{m v_B^2}{2f}$

PIÈGE
Oublier le signe du travail de $\vec{f}$: sans le $\cos(180^\circ) = -1$, on obtient une distance négative.

Q.6 Montrer que la distance d'arrêt s'exprime par $BC = \dfrac{v_B^2}{2\,\mu_c\,g}$.

Données utiles $\mu_c = \dfrac{f}{R}$; $BC = \dfrac{m\,v_B^2}{2f}$ (Q.5)

Le mouvement est horizontal : il n'y a pas d'accélération verticale. La deuxième loi de Newton projetée sur l'axe vertical donne $R - P = 0$, soit $R = m\,g$.

Par définition de μ_c : $f = \mu_c\,R = \mu_c\,m\,g$.

En reportant dans la relation de la Q.5 :

$$BC = \frac{m\,v_B^2}{2\,\mu_c\,m\,g}$$

$BC = \dfrac{v_B^2}{2\,\mu_c\,g}$: la masse se simplifie, c'est la relation attendue.

PIÈGE
Écrire $R = m\,g$ sans justification. L'égalité vient de l'absence de mouvement vertical ; sur le plan incliné de la partie A, elle serait fausse.

Q.7 Calculer la valeur de la distance d'arrêt.

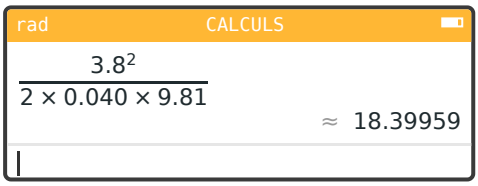
Données utiles $v_B = 3{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\mu_c = 0{,}040$; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$$BC = \frac{v_B^2}{2\,\mu_c\,g} = \frac{3{,}8^2}{2 \times 0{,}040 \times 9{,}81} = 18\ \text{m}$$

$BC = 18$ m

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs : v_B et μ_c n'en ont que deux. À la calculatrice, mettre le dénominateur entre parenthèses.

À LA CALCULATRICE



Q.8 Indiquer en justifiant comment évolue la distance d'arrêt lorsque les roues sont remplacées par des roues moins dures de même géométrie.

Des roues moins dures frottent davantage : la force f augmente, donc $\mu_c = \dfrac{f}{R}$ augmente ($R = m\,g$ est inchangée).

Or $BC = \dfrac{v_B^2}{2\,\mu_c\,g}$: pour une même vitesse v_B, BC est inversement proportionnelle à μ_c.

La distance d'arrêt diminue.

Q.9 En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les équations horaires du mouvement du centre de masse G lors du saut.

Données utiles à $t = 0$: $x_0 = 0$, $z = z_0$, vitesse $\vec{v}_D$ faisant l'angle β avec l'horizontale

Système {skateboardeur}, référentiel terrestre supposé galiléen.
L'action de l'air est négligée : la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$. Dans le repère $(D\,;\vec{i},\vec{k})$:

$$a_x = 0 \qquad a_z = -g$$

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on primitive, avec $\vec{v}(0) = \vec{v}_D$ de coordonnées $(v_D\cos\beta\ ;\ v_D\sin\beta)$:

$$v_x(t) = v_D\cos\beta \qquad v_z(t) = -g\,t + v_D\sin\beta$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{DG}}{\mathrm{d}t}$, on primitive encore, avec $x(0) = 0$ et $z(0) = z_0$:

$$\boxed{x(t) = v_D\cos(\beta)\,t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_D\sin(\beta)\,t + z_0}$$

PIÈGE
Oublier z_0 : à l'instant initial, G n'est pas à l'origine du repère mais à 80 cm au-dessus du point D.

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi, projection, puis deux primitives. Chaque constante d'intégration se détermine avec une condition initiale, à citer explicitement.

Q.10 Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit $z(x) = -\dfrac{g}{2\,v_D^2\cos^2(\beta)}\,x^2 + \tan(\beta)\,x + z_0$.

Données utiles équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ (Q.9)

On élimine le temps : $x = v_D\cos(\beta)\,t$ donne $t = \dfrac{x}{v_D\cos\beta}$.

On reporte dans $z(t)$:

$$z(x) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_D\cos\beta}\right)^2 + v_D\sin\beta \times \frac{x}{v_D\cos\beta} + z_0$$

Avec $\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \tan\beta$:

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2\,v_D^2\cos^2(\beta)}\,x^2 + \tan(\beta)\,x + z_0} \text{ : c'est la relation attendue.}$$

Q.11 Calculer la coordonnée x du centre de masse lorsque le skateboardeur retrouve l'altitude initiale $z = z_0$.

Données utiles $z(x) = -0{,}894\,x^2 + 1{,}22\,x + 0{,}80$ (x et z en m) ; $z_0 = 0{,}80$ m

On résout $z(x) = z_0$:

$-0{,}894\,x^2 + 1{,}22\,x + 0{,}80 = 0{,}80$, soit $x\,(-0{,}894\,x + 1{,}22) = 0$.

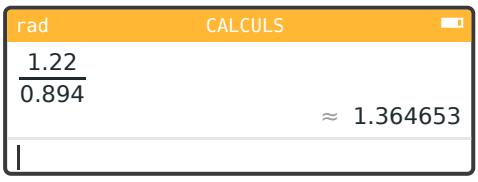
Deux solutions : $x = 0$ (point de départ, à écarter) ou $-0{,}894\,x + 1{,}22 = 0$.

$$x = \frac{1{,}22}{0{,}894} = 1{,}36\ \text{m}$$

$$\boxed{x = 1{,}36\ \text{m}}$$

MÉTHODE
Le terme constant disparaît : on factorise par x au lieu de calculer un discriminant. La solution $x = 0$ a un sens physique, c'est le départ du saut.

À LA CALCULATRICE



Q.12 En déduire si le skateboardeur franchira ou non l'obstacle.

Données utiles $\ell = 0{,}70$ m ; $L = 1{,}0$ m ; $x = 1{,}36$ m (Q.11)

Quand G retrouve l'altitude z_0 qu'il avait au départ, le skateboard retouche le sol : le saut se termine à $x = 1{,}36$ m.

L'obstacle s'étend de $x = \ell = 0{,}70$ m à $x = \ell + L = 0{,}70 + 1{,}0 = 1{,}7$ m.

Or $0{,}70\ \text{m} < 1{,}36\ \text{m} < 1{,}7\ \text{m}$: le skateboardeur retombe au-dessus de l'obstacle.

$x = 1{,}36\ \text{m} < \ell + L = 1{,}7\ \text{m}$: l'obstacle n'est pas franchi.

PIÈGE
Comparer x à L seul, ou à ℓ seul. La fin de l'obstacle se trouve à l'abscisse $\ell + L$, comptée depuis le point D.

Q.13 Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C lors de la décharge s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C = 0$, où τ est une constante.

Interrupteur en position 2, avec les orientations du schéma.

Loi des mailles : $u_C + u_R = 0$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

Pour le condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$, avec C constante, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

On reporte : $u_C + R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$, puis on divise par $R\,C$:

$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C = 0$ avec $\tau = R\,C$

PIÈGE
Garder la tension U_1 dans la loi des mailles : en position 2, le dispositif de charge n'est plus dans la maille, qui ne contient que le condensateur et le tube.

Q.14 Vérifier que l'équation différentielle admet une solution de la forme $u(t) = A\,e^{-t/B}$ et exprimer A et B en fonction des paramètres du circuit.

Données utiles $\tau = R\,C$ (Q.13) ; condensateur chargé sous $U_1 = 310$ V à $t = 0$

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{A}{B}\,e^{-t/B}$.

On reporte dans l'équation différentielle :

$$-\frac{A}{B}\,e^{-t/B} + \frac{1}{\tau}\,A\,e^{-t/B} = A\,e^{-t/B}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{B}\right)$$

Cette expression est nulle à chaque instant si $\dfrac{1}{B} = \dfrac{1}{\tau}$, soit $B = \tau = R\,C$: la fonction proposée est bien solution.

Condition initiale : à $t = 0$, le condensateur est chargé sous la tension U_1, donc $u(0) = A\,e^0 = A = U_1$.

$A = U_1$ et $B = R\,C$, soit $u_C(t) = U_1\,e^{-t/(RC)}$

MÉTHODE
Deux étapes distinctes : reporter la fonction dans l'équation donne B ; la condition initiale donne A. L'équation différentielle seule ne permet pas de trouver A.

Q.15 Montrer que la constante τ est homogène à un temps.

Données utiles $\tau = RC$ (Q.13)

Loi d'Ohm $u_R = Ri$: R s'exprime en $\mathrm{V \cdot A^{-1}}$.

Relation $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$: $C = \dfrac{i}{\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t}$ s'exprime en $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{V \cdot s^{-1}}} = \mathrm{A \cdot s \cdot V^{-1}}$.

Le produit RC s'exprime donc en $\mathrm{V \cdot A^{-1} \times A \cdot s \cdot V^{-1}} = \mathrm{s}$.

$\tau = RC$ s'exprime en secondes : τ est homogène à un temps.

COMPRENDRE
Autre argument recevable : dans l'équation différentielle, $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ est en $\mathrm{V \cdot s^{-1}}$, donc $\dfrac{u_C}{\tau}$ aussi, ce qui impose τ en secondes.

Q.16 Déterminer la valeur de la constante de temps τ en expliquant la méthode graphique employée.

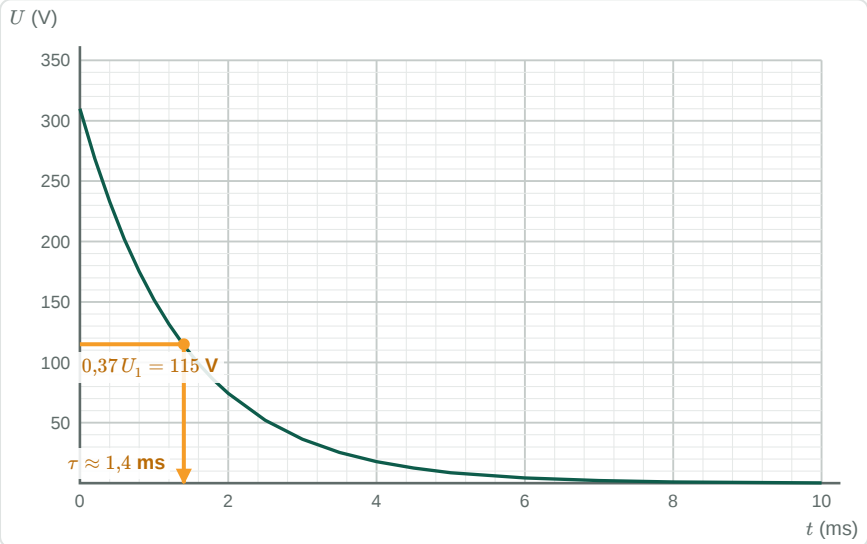
Données utiles courbe de décharge : $U_1 = 310$ V à $t = 0$; $u_C(t) = U_1\, e^{-t/\tau}$ (Q.14)

À la date $t = \tau$: $u_C(\tau) = U_1\, e^{-1} = 0{,}37\, U_1$.

$$u_C(\tau) = 0{,}37 \times 310 = 115 \text{ V}$$

On trace l'horizontale d'ordonnée 115 V jusqu'à la courbe, puis on lit l'abscisse du point d'intersection.

$\tau \approx 1{,}4$ ms

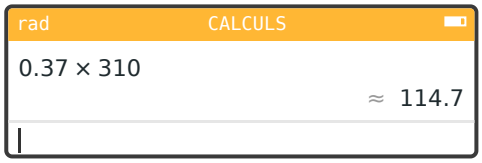


Q.16 · Courbe de décharge du sujet, avec la lecture de la constante de temps

PIÈGE
Donner le résultat en secondes : l'axe des abscisses est gradué en millisecondes. Autre méthode possible, moins précise ici : la tangente à l'origine coupe l'axe des temps en $t = \tau$.

COMPRENDRE
La lecture est cohérente avec l'énoncé, qui annonce ensuite $5\,\tau \approx 7{,}5$ ms, soit $\tau \approx 1{,}5$ ms. Sur ce quadrillage, toute valeur entre $1{,}3$ et $1{,}5$ ms est recevable.

À LA CALCULATRICE



Q.17 La photographie est prise 7,5 ms après le passage en D. Déterminer laquelle des trois étapes du saut (avant, au-dessus ou après l'obstacle) est photographiée.

Données utiles $\Delta t = 5\,\tau = 7{,}5$ ms ; $v_D = 3{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\beta = 50{,}7^\circ$; $\ell = 0{,}70$ m ; $x(t) = v_D\cos(\beta)\,t$ (Q.9)

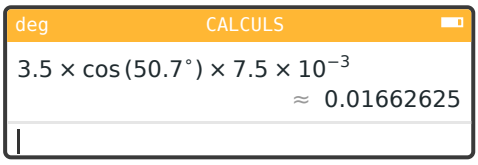
Le saut débute en D à $t = 0$ et la photographie est prise à la date $t = 7{,}5\times10^{-3}$ s. On calcule l'abscisse de G à cette date et on la compare à celle du début de l'obstacle.

$$x = v_D\cos(\beta)\,t = 3{,}5\times\cos(50{,}7^\circ)\times7{,}5\times10^{-3} = 1{,}7\times10^{-2}\ \text{m}$$

Le skateboardeur n'a avancé que de 1,7 cm, alors que l'obstacle commence à $\ell = 0{,}70\ \text{m} = 70$ cm du point D.

$x = 1{,}7\ \text{cm} < \ell = 70\ \text{cm}$: c'est l'étape « avant l'obstacle » qui est photographiée.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE

Laisser 7,5 ms en millisecondes dans le calcul, ou régler la calculatrice en radians pour $\cos(50{,}7^\circ)$.

COMPRENDRE

Avec $v_D = 3{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, le coefficient de x^2 vaudrait 0,998 et non 0,894 (qui correspond à $3{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). Cet écart de l'énoncé ne change rien : 7,5 ms est très court devant la durée du saut.