Plongeon de haut vol

Bac 2023 Centres étrangers 1 Jour 2 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 35**

1 Recopier et compléter les instructions des lignes 36 et 38 du programme Python.

L'énergie potentielle de pesanteur, nulle en $y = 0$, s'écrit $E_{pp} = m\,g\,y$ (axe y vers le haut) ; l'énergie mécanique est $E_m = E_c + E_{pp}$.

Ligne 36 : `Eppi = m*g*y[i]` Ligne 38 : `Emi = Eci + Eppi`

PIÈGE
Oublier l'indice `[i]` : `y` est une liste, on ne peut pas la multiplier par $m\,g$. À l'inverse, `Eci` et `Eppi` sont des nombres, sans crochets.

2 Justifier que la courbe en pointillés de la figure 3 est celle de l'énergie cinétique.

À $t = 0$ le plongeur est en O : $y = 0$ donc $E_{pp} = 0$, alors qu'il possède une vitesse v_0 non nulle, donc $E_c \neq 0$.

Sur la figure 3, ce sont les croix qui partent de 0 J ; la courbe en pointillés part d'environ 190 J.

De plus, le plongeur commence par monter : y augmente et sa vitesse diminue, donc E_{pp} croît et E_c décroît, ce que fait la courbe en pointillés au début.

La courbe en pointillés, non nulle à $t = 0$ et d'abord décroissante, est celle de E_c.

MÉTHODE
Pour attribuer des courbes d'énergie, regarder d'abord l'instant initial : l'altitude y fixe E_{pp}, la vitesse y fixe E_c. Un seul argument net suffit.

3 Montrer, à partir de la courbe de l'énergie cinétique, que la vitesse initiale est de l'ordre de $v_0 = 2{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $m = 70{,}0$ kg ; figure 3

Lecture graphique à $t = 0$: $E_c(0) \approx 190$ J.

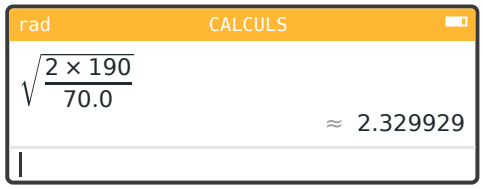
Or $E_c(0) = \dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2$, donc $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\,E_c(0)}{m}}$.

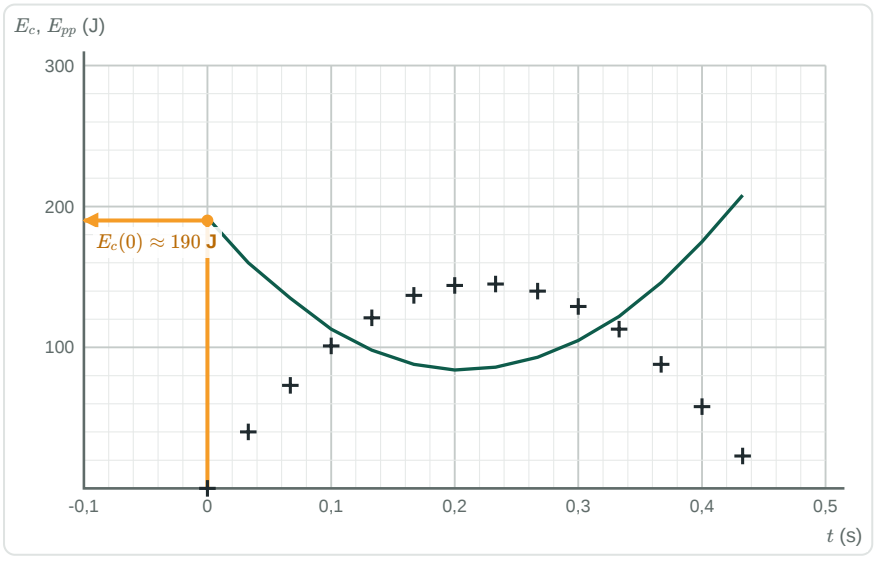
$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 190}{70{,}0}} = 2{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_0 \approx 2{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur attendue.

COMPRENDRE
La lecture graphique ne donne que deux chiffres significatifs (une graduation vaut 20 J) : le résultat s'écrit donc avec deux chiffres, pas plus.

À LA CALCULATRICE





3 · Figure 3 du sujet : lecture de E_c à $t = 0$ (croix : E_{pp} ; courbe : E_c)

4 Pour chacune des deux phases, $t \leqslant 0{,}4$ s puis $t > 0{,}4$ s, préciser si les frottements sont négligeables ou non. Justifier.

Le plongeur est soumis à son poids, force conservative, et aux frottements de l'air, force non conservative. La variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives : $\Delta E_m = W(\vec{f})$.

- $t \leqslant 0{,}4$ s : E_m est constante, donc $W(\vec{f}) \approx 0$.
- $t > 0{,}4$ s : E_m diminue, donc $W(\vec{f}) < 0$: les frottements dissipent de l'énergie.

Frottements négligeables pour $t \leqslant 0{,}4$ s ; non négligeables pour $t > 0{,}4$ s.

COMPRENDRE
Le travail des frottements est toujours résistant (force opposée au déplacement) : l'énergie mécanique ne peut que diminuer, jamais augmenter.

5 À partir de la figure 4, formuler une hypothèse sur l'importance des forces de frottement selon que la vitesse est faible ou élevée.

Tant que E_c est faible (début du saut), donc que la vitesse est faible, E_m reste constante. Ensuite E_c, donc la vitesse, augmente fortement et E_m décroît de plus en plus.

Hypothèse : les frottements sont négligeables à faible vitesse et d'autant plus importants que la vitesse est élevée.

MÉTHODE
Comme m est constante, lire E_c revient à lire la vitesse : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ croît avec v. C'est ce lien qui permet de passer des courbes à une conclusion sur la vitesse.

6 À l'aide du tableau de la figure 1, calculer v_{0x} et v_{0y} en appliquant les instructions des lignes 24 et 25 du code Python.

Données utiles à $t_0 = 0$: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; à $t_1 = 0{,}033$ s : $x_1 = 0{,}050$ m, $y_1 = 0{,}060$ m

Pour $i = 0$, les lignes 24 et 25 calculent :

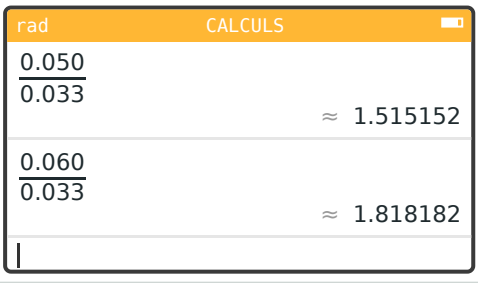
$$v_{0x} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{0{,}050 - 0}{0{,}033 - 0} = 1{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{0y} = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0} = \frac{0{,}060 - 0}{0{,}033 - 0} = 1{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$v_{0x} = 1{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_{0y} = 1{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

COMPRENDRE
Le programme approche la vitesse au point i par la vitesse moyenne entre les points i et $i+1$. Pour $i = 0$, on utilise donc les deux premières lignes du tableau.

À LA CALCULATRICE



7 À partir des valeurs de v_{0x} et v_{0y}, vérifier que l'angle α est de l'ordre de 50°.

Données utiles $v_{0x} = 1{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_{0y} = 1{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Q6)

α est l'angle entre $\vec{v}_0$ et l'horizontale : $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ et $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, d'où

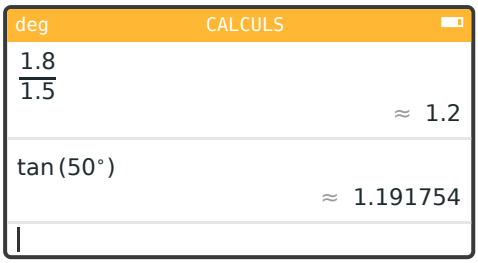
$$\tan\alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{1{,}8}{1{,}5} = 1{,}2 \qquad \alpha = \arctan(1{,}2) = 50^\circ$$

$\alpha \approx 50^\circ$, valeur attendue.

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\arctan(1{,}2)$ affiche alors 0,876. Vérifier le mode degrés avant tout calcul d'angle.

COMPRENDRE
Contrôle : $\sqrt{1{,}5^2 + 1{,}8^2} = 2{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on retrouve la valeur de v_0 de la question 3.

À LA CALCULATRICE



8 Écrire la relation traduisant la deuxième loi de Newton appliquée au plongeur, avec $\vec{g}$ et $\vec{a}$.

Système {plongeur}, de masse m constante ; référentiel du plongeoir supposé galiléen ; seule force (chute libre) : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

COMPRENDRE
La masse se simplifie : dans le modèle de la chute libre, le mouvement ne dépend pas de la masse du plongeur.

9 Exprimer les coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ de l'accélération, puis $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la vitesse, en fonction de v_0, g, t et α.

$\vec{g}$ est vertical vers le bas et l'axe y est orienté vers le haut : $a_x(t) = 0$ et $a_y(t) = -g$.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives : $v_x(t) = C_1$ et $v_y(t) = -g\,t + C_2$.

À $t = 0$: $v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ et $v_y(0) = v_0 \sin\alpha$, donc $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$.

$$\boxed{a_x = 0\ ;\ a_y = -g\ ;\ v_x(t) = v_0 \cos\alpha\ ;\ v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha}$$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou écrire $a_y = +g$ alors que l'axe y pointe vers le haut.

10 Montrer que les équations horaires sont $x(t) = v_0 \cos(\alpha)\,t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin(\alpha)\,t$.

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de v_x et v_y :

$x(t) = v_0 \cos(\alpha)\,t + C_3$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin(\alpha)\,t + C_4$.

À $t = 0$, P est en O : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$.

$$\boxed{x(t) = v_0 \cos(\alpha)\,t \text{ et } y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin(\alpha)\,t}$$

MÉTHODE
Toujours le même enchaînement : $\vec{a}$ → primitive → $\vec{v}$ (constantes fixées par $\vec{v}_0$) → primitive → $\overrightarrow{OP}$ (constantes fixées par la position initiale).

11 Établir l'équation de la trajectoire et montrer qu'elle est compatible avec l'allure de la trajectoire de la figure 1.

De $x = v_0 \cos(\alpha)\,t$ on tire $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, que l'on reporte dans $y(t)$:

$$y(x) = -\frac{g}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2 + \tan(\alpha)\,x$$

C'est une fonction du type $y = A\,x^2 + B\,x$ avec $A < 0$ et $B > 0$: une parabole passant par O, qui monte d'abord puis redescend.

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2 + \tan(\alpha)\,x} \text{ : parabole tournée vers le bas, comme sur la figure 1.}$$

PIÈGE
S'arrêter à l'équation. La question demande aussi de la relier à la figure : nommer la parabole et le signe du coefficient de x^2.

12 À partir des équations horaires, montrer que la durée de la chute est solution de $-4{,}9\,t^2 + 1{,}8\,t + 28 = 0$ (équation 1).

Données utiles $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_0 \sin\alpha = v_{0y} = 1{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q6) ; O est à 28 m au-dessus de l'eau

La surface de l'eau est à 28 m sous l'origine O : le plongeur l'atteint quand $y(t) = -28$ m.

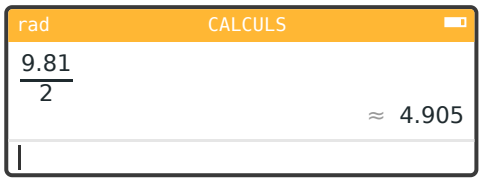
$$-\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \sin(\alpha)\,t = -28$$

Avec $\frac{1}{2}\,g = \frac{9{,}81}{2} = 4{,}9$ et $v_0 \sin\alpha = 1{,}8$ (unités SI) : $-4{,}9\,t^2 + 1{,}8\,t = -28$.

$-4{,}9\,t^2 + 1{,}8\,t + 28 = 0$: c'est l'équation 1.

PIÈGE
Écrire $y = +28$ ou $y = 0$ à l'arrivée. L'origine est au point de départ et l'axe pointe vers le haut : l'eau est en $y = -28$ m.

À LA CALCULATRICE



13 Vérifier que l'hypothèse de la chute libre conduit à une durée de chute en accord avec le résultat expérimental.

Données utiles $t_1 = -2{,}21$ s ; $t_2 = 2{,}58$ s ; $\Delta t_{\text{exp}} = 2{,}8$ s ; $u(\Delta t_{\text{exp}}) = 0{,}3$ s

Une durée est positive : on retient $t_2 = 2{,}58$ s.

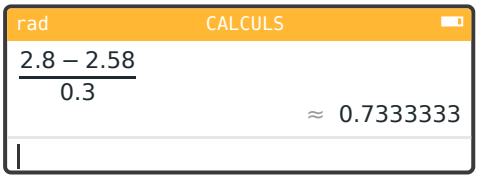
Écart normalisé :

$$z = \frac{|\Delta t_{\text{exp}} - t_2|}{u(\Delta t_{\text{exp}})} = \frac{|2{,}8 - 2{,}58|}{0{,}3} = 0{,}7$$

$z \approx 0{,}7 < 2$: la durée calculée, 2,58 s, est en accord avec la mesure.

COMPRENDRE
L'écart entre les deux durées (0,22 s) est inférieur à une seule incertitude-type. Les frottements, bien réels après 0,4 s, allongent un peu la chute mais sans effet mesurable ici.

À LA CALCULATRICE



14 Montrer que la vitesse d'entrée dans l'eau v_{th} prédite par l'étude cinématique est de l'ordre de $24\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $t_2 = 2{,}58$ s ; $v_{0x} = 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $v_{0y} = 1{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q6) ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

À l'instant t_2, d'après la question 9 :

$v_x(t_2) = v_0 \cos\alpha = 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

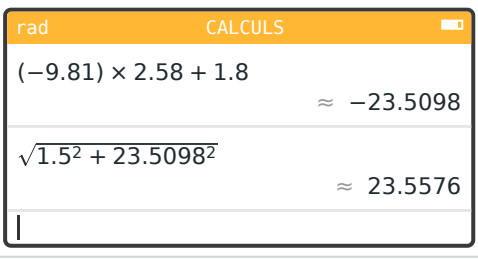
$v_y(t_2) = -g\,t_2 + v_0 \sin\alpha = -9{,}81 \times 2{,}58 + 1{,}8 = -23{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$$v_{th} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1{,}5^2 + (-23{,}5)^2} = 23{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_{th} = 23{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 24\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur attendue.

MÉTHODE
Autre voie : conservation de l'énergie mécanique entre O et l'eau, $v_{th} = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h}$ avec $h = 28$ m, qui redonne $23{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

À LA CALCULATRICE



15 Indiquer si la valeur v_{th} obtenue à la question 14 est en accord ou non avec la valeur citée dans l'article.

Données utiles article : vitesse d'impact « proche de 90 km/h » ; $v_{th} \approx 24\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Q14)

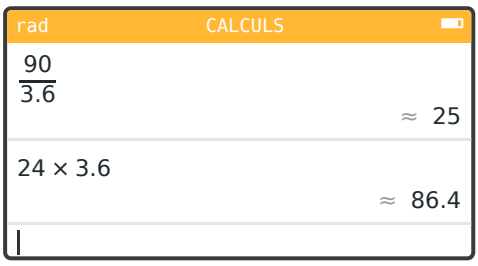
Conversion : $90\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = \dfrac{90}{3{,}6} = 25\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'écart relatif avec v_{th} vaut $\dfrac{25-24}{25} = 4\ \%$, et l'article ne donne qu'une valeur approchée.

$v_{th} \approx 24\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (soit $86\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) est en accord avec les $90\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ de l'article.

PIÈGE
Comparer 24 et 90 sans convertir. Pour passer des $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ aux $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, on divise par 3,6.

À LA CALCULATRICE



16 Estimer l'accélération a_{eau} subie par le plongeur une fois dans l'eau à partir de la vitesse de la question 14, et la comparer à g.

Données utiles $v_{th} \approx 24\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Q14) ; immobilisation en $\Delta t = 0{,}5\ \text{s}$; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

La vitesse passe de v_{th} à 0 en $\Delta t = 0{,}5$ s. En valeur, l'accélération moyenne est :

$$a_{\text{eau}} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{|0-24|}{0{,}5} = 48\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Comparaison : $\dfrac{a_{\text{eau}}}{g} = \dfrac{48}{9{,}81} \approx 5$.

$a_{\text{eau}} \approx 5 \times 10^{1}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, soit environ 5 fois g.

COMPRENDRE
Le vecteur accélération est opposé à la vitesse, donc dirigé vers le haut : c'est un freinage. La durée 0,5 s n'a qu'un chiffre significatif, d'où une simple estimation.

À LA CALCULATRICE

