Une brosse à dents

Bac 2024 Polynésie Septembre · Exercice 2 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q1 Dans l'approximation des petits angles, montrer que $L = k \cdot \dfrac{1}{a}$ et vérifier que $k = 2\,\lambda\,D$.

Données utiles $\theta = \dfrac{\lambda}{a}$; $\tan\theta \approx \theta$

Sur la figure 1, dans le triangle rectangle formé par l'axe du faisceau et le bord de la tache centrale, le côté opposé à θ mesure $\dfrac{L}{2}$ et le côté adjacent D :

$$\tan\theta = \frac{L/2}{D} = \frac{L}{2D}$$

L'angle étant petit, $\tan\theta \approx \theta$, donc $\theta = \dfrac{L}{2D}$. Par ailleurs $\theta = \dfrac{\lambda}{a}$.

En égalant : $\dfrac{L}{2D} = \dfrac{\lambda}{a}$, soit $L = \dfrac{2\,\lambda\,D}{a}$.

$L = k \cdot \dfrac{1}{a}$ avec $k = 2\,\lambda\,D$

PIÈGE

Écrire $\tan\theta = \dfrac{L}{D}$. L'angle θ va de l'axe au bord de la tache : il intercepte la demi-largeur $\dfrac{L}{2}$, d'où le facteur 2 dans k.

Q2 Attribuer à chacune des expériences A et B le diamètre du fil utilisé ($a_1 = 150\ \mu\text{m}$ ou $a_2 = 300\ \mu\text{m}$), en justifiant.

Données utiles figure 2 : $L_A = 1{,}32$ cm ; $L_B = 0{,}65$ cm

D'après Q1, à λ et D fixés, L est inversement proportionnelle à a : plus le fil est fin, plus la tache centrale est large.

La tache centrale la plus large est celle de l'expérience A ($1{,}32\ \text{cm} > 0{,}65\ \text{cm}$).

Expérience A : $a_1 = 150\ \mu\text{m}$; expérience B : $a_2 = 300\ \mu\text{m}$.

COMPRENDRE

Les mesures confirment la loi : $\dfrac{L_A}{L_B} \approx 2$ pour un diamètre divisé par 2, puisque le produit $L \times a$ reste égal à k.

Q3 Montrer que le diamètre expérimental a_{brosse} du brin de brosse à dents ultrasouple vaut $1{,}04 \times 10^{-4}$ m.

Données utiles $L = 1{,}89$ cm ; $k = 1{,}96 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$

D'après Q1, $L = \dfrac{k}{a_{\text{brosse}}}$, donc $a_{\text{brosse}} = \dfrac{k}{L}$.

$$a_{\text{brosse}} = \frac{1{,}96 \times 10^{-6}}{1{,}89 \times 10^{-2}} = 1{,}04 \times 10^{-4}\ \text{m}$$

$a_{\text{brosse}} = 1{,}04 \times 10^{-4}\ \text{m} = 104\ \mu\text{m}$, valeur attendue.

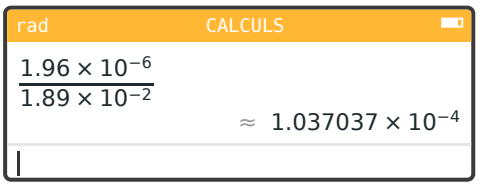
PIÈGE

Laisser L en centimètres : k est en m^2, il faut $L = 1{,}89 \times 10^{-2}$ m pour obtenir un diamètre en mètres.

COMPRENDRE

Trois chiffres significatifs, comme k et L.

À LA CALCULATRICE



Q4 Calculer l'incertitude-type $u(a_{\text{brosse}})$ sur le diamètre du brin à l'aide de la formule fournie.

Données utiles $u(k) = 0{,}03 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$; $u(L) = 1{,}0\ \text{mm}$; $a_{\text{brosse}} = 1{,}04 \times 10^{-4}\ \text{m}$ (Q3)

$$u(a_{\text{brosse}}) = a_{\text{brosse}} \times \sqrt{\left(\frac{u(k)}{k}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2}$$

Avec $u(L) = 1{,}0\ \text{mm} = 0{,}10\ \text{cm}$:

$$u(a_{\text{brosse}}) = 1{,}04 \times 10^{-4} \times \sqrt{\left(\frac{0{,}03}{1{,}96}\right)^2 + \left(\frac{0{,}10}{1{,}89}\right)^2} = 5{,}7 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

L'incertitude-type s'écrit avec un seul chiffre significatif, arrondi par excès.

$u(a_{\text{brosse}}) = 6 \times 10^{-6}\ \text{m} = 6\ \mu\text{m}$

PIÈGE
Dans chaque quotient, les deux grandeurs doivent avoir la même unité : $u(L)$ en mm et L en cm donnent un rapport dix fois trop grand.

COMPRENDRE
Le terme en L (5,3 %) domine celui en k (1,5 %) : c'est la mesure de la tache à la règle qui limite la précision.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1.04 \times 10^{-4} \times \sqrt{\left(\frac{0.03}{1.96}\right)^2 + \left(\frac{0.10}{1.89}\right)^2}$

$\approx 5.728268 \times 10^{-6}$

Q5 Vérifier que le diamètre obtenu expérimentalement est en accord avec la valeur de référence de $100\ \mu\text{m}$.

Données utiles $a_{\text{brosse}} = 104\ \mu\text{m}$ (Q3) ; $u(a_{\text{brosse}}) = 6\ \mu\text{m}$ (Q4) ; critère : quotient $\leqslant 2$

$$\frac{|a_{\text{brosse}} - a_{\text{réf}}|}{u(a_{\text{brosse}})} = \frac{104 - 100}{6} = 0{,}7$$

$0{,}7 \leqslant 2$: le diamètre mesuré est en accord avec la valeur de référence de $100\ \mu\text{m}$.

COMPRENDRE
L'écart de $4\ \mu\text{m}$ est inférieur à une incertitude-type : il s'explique par la seule dispersion des mesures. Ce quotient est souvent appelé z-score.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{104 - 100}{6}$

≈ 0.6666667

Q6 Calculer l'intensité sonore I_1 correspondant au niveau d'intensité sonore $L_1 = 65$ dB relevé à 10 cm de la brosse à dents électrique.

Données utiles $L = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$; $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

$L_1 = 10 \times \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$ donc $\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = \frac{L_1}{10}$, soit $I_1 = I_0 \times 10^{L_1/10}$.

$$I_1 = 1{,}0 \times 10^{-12} \times 10^{65/10} = 3{,}2 \times 10^{-6}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$I_1 = 3{,}2 \times 10^{-6}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

MÉTHODE
Pour isoler I : diviser par 10, puis appliquer la fonction 10^x, réciproque du logarithme décimal. À retenir : $I = I_0 \times 10^{L/10}$.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1.0 \times 10^{-12} \times 10^{\frac{65}{10}}$

$\approx 3.162278 \times 10^{-6}$

Q7 Calculer la distance à laquelle une personne doit se placer pour ne pas être incommodée (atténuation géométrique de 25 dB), puis dire si elle peut rester dans la salle de douche.

Données utiles $L_1 = 65$ dB ; $P = 4{,}0 \times 10^{-7}$ W ; $I = \dfrac{P}{S}$ avec $S = 4\pi\, d^2$; $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}$ W · m^{-2} ; plan de la figure 3

Niveau à atteindre. Une atténuation de 25 dB ramène le niveau à $L_2 = 65 - 25 = 40$ dB.

Intensité correspondante. $I_2 = I_0 \times 10^{L_2/10} = 1{,}0 \times 10^{-12} \times 10^{4{,}0} = 1{,}0 \times 10^{-8}$ W · m^{-2}

Distance. $I_2 = \dfrac{P}{4\pi\, d_2^2}$ donc $d_2 = \sqrt{\dfrac{P}{4\pi\, I_2}}$

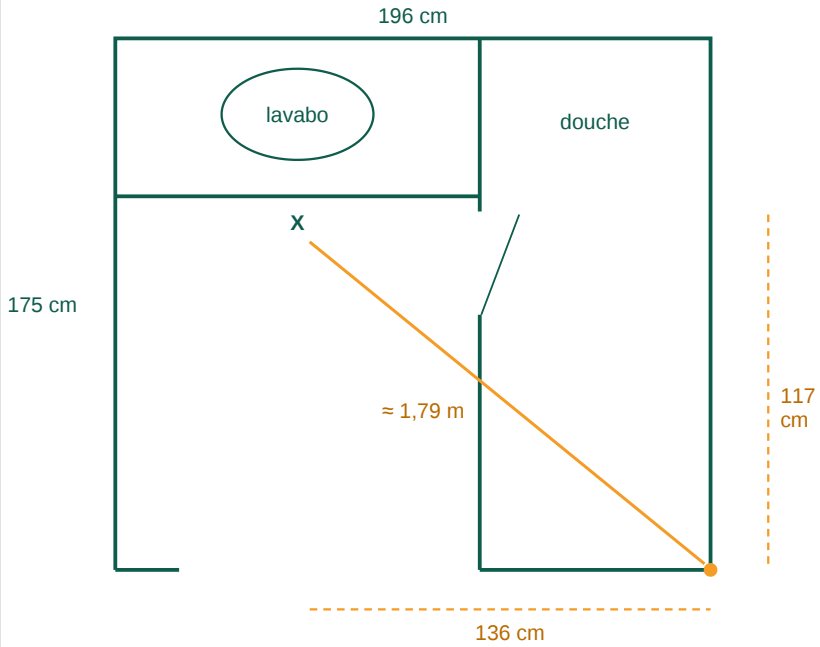
$$d_2 = \sqrt{\frac{4{,}0 \times 10^{-7}}{4\pi \times 1{,}0 \times 10^{-8}}} = 1{,}8 \text{ m}$$

Lecture du plan. Le point le plus éloigné de la croix est le coin de la douche opposé au lavabo. Mesuré sur le plan à l'échelle (croix à environ 60 cm du mur de gauche et 58 cm du mur du haut), il se trouve à $196 - 60 = 136$ cm horizontalement et $175 - 58 = 117$ cm verticalement :

$$d_{\max} = \sqrt{136^2 + 117^2} \approx 179 \text{ cm} = 1{,}79 \text{ m}$$

À la précision de la lecture, $1{,}79 \text{ m} \approx 1{,}78 \text{ m}$: même au point le plus éloigné, la personne n'est pas au-delà de la distance nécessaire, et partout ailleurs elle est plus près.

$d_2 = 1{,}8$ m : une personne présente dans la salle de douche est incommodée quelle que soit sa place, même au fond de la douche.



Q7 · Figure 3 du sujet : distance de la croix au coin le plus éloigné de la douche

PIÈGE
Diviser l'intensité I_1 par 25, ou chercher la distance où $L = 25$ dB. Les décibels se retranchent : $65 - 25 = 40$ dB, puis on revient à l'intensité.

COMPRENDRE
La lecture du plan est précise à quelques centimètres ; la conclusion se fait à cette précision.

MÉTHODE
Autre voie, sans la puissance : l'intensité varie en $\dfrac{1}{d^2}$, donc l'atténuation vaut $20 \times \log\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right) = 25$ dB, soit $d_2 = 0{,}10 \times 10^{1{,}25} = 1{,}8$ m.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$1.0 \times 10^{-12} \times 10^{\frac{40}{10}} \approx 1 \times 10^{-8}$$

$$\sqrt{\frac{4.0 \times 10^{-7}}{4 \times \pi \times 1.0 \times 10^{-8}}} \approx 1.784124$$

$$\sqrt{136^2 + 117^2} \approx 179.4018$$