La protonthérapie sauve la vue

Bac 2024 Polynésie Jour 1 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Avec la deuxième loi de Newton, exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$ du proton dans la zone A en fonction de e, m et $\vec{E}$. Donner sa direction, son sens, sa valeur, puis la nature du mouvement.

Données utiles $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; $U = 50$ kV ; $d = 1{,}0$ cm ; $E = \dfrac{|U|}{d}$

Système {proton}, de masse m constante ; référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Seule force prise en compte : la force électrique $\vec{F}_e = e\,\vec{E}$ (poids négligé).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $e\,\vec{E} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \dfrac{e}{m}\,\vec{E}$.

Comme $\dfrac{e}{m} > 0$, $\vec{a}$ a la direction et le sens de $\vec{E}$: direction de l'axe (Ox), sens de O vers M_1.

Valeur : $a = \dfrac{e\,E}{m} = \dfrac{e\,U}{m\,d}$

$$a = \frac{1{,}6 \times 10^{-19} \times 50 \times 10^{3}}{1{,}67 \times 10^{-27} \times 1{,}0 \times 10^{-2}} = 4{,}8 \times 10^{14}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

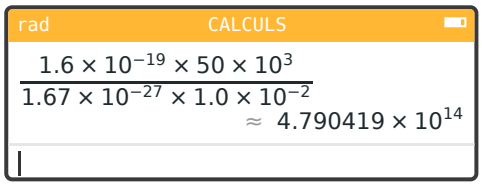
Le vecteur $\vec{a}$ est constant et la vitesse initiale est nulle : le proton se déplace sur la droite (Ox) en accélérant.

$\vec{a} = \dfrac{e}{m}\,\vec{E}$, de valeur $a = 4{,}8 \times 10^{14}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$: mouvement **rectiligne uniformément accéléré**.

PIÈGE
Laisser U en kilovolts ou d en centimètres : il faut 50×10^{3} V et $1{,}0 \times 10^{-2}$ m.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme e, U et d, les données les moins précises. La même règle s'applique à tous les calculs de l'exercice.

À LA CALCULATRICE



Q2 Établir la coordonnée $v_x(t)$ du proton dans le repère (O, x, y), puis montrer que $v_1 = v_x(t_1) = \sqrt{\dfrac{2\,e\,U}{m}}$.

Le champ $\vec{E}$ est dirigé selon (Ox), donc $a_x = \dfrac{e\,E}{m} = \dfrac{e\,U}{m\,d}$ et $a_y = 0$.

Comme $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$, on cherche une primitive : $v_x(t) = \dfrac{e\,U}{m\,d}\,t + C$. À $t = 0$, la vitesse est nulle, donc $C = 0$:

$$v_x(t) = \frac{e\,U}{m\,d}\,t$$

Vitesse en M_1, par le théorème de l'énergie cinétique entre O et M_1 :

$$\frac{1}{2}\,m\,v_1^2 - 0 = W_{\mathrm{O}\to\mathrm{M}_1}(\vec{F}_e)$$

La force $\vec{F}_e$ est constante, de même sens que le déplacement $\overrightarrow{\mathrm{OM}_1}$ de longueur d : $W = e\,E\,d = e\,\dfrac{U}{d}\,d = e\,U$.

Donc $\dfrac{1}{2}\,m\,v_1^2 = e\,U$. De plus $v_y = 0$ et $v_x > 0$, donc $v_1 = v_x(t_1)$.

$v_1 = v_x(t_1) = \sqrt{\dfrac{2\,e\,U}{m}}$, expression attendue.

PIÈGE
Oublier de justifier la constante d'intégration par la condition initiale « vitesse nulle en O ».

MÉTHODE
Autre voie, plus longue : primitive de v_x pour obtenir $x(t) = \dfrac{e\,U}{2\,m\,d}\,t^2$, date t_1 telle que $x(t_1) = d$, puis report dans $v_x(t_1)$. La distance d se simplifie aussi.

Q3 En déduire les caractéristiques (direction, sens, valeur) du vecteur vitesse $\vec{v}_1$ au point M_1.

Données utiles $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $U = 50$ kV ; $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

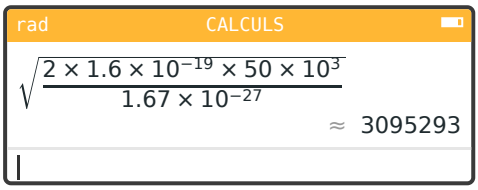
En M_1 : $v_y = 0$ et $v_x(t_1) > 0$. Le vecteur $\vec{v}_1$ est donc dirigé selon l'axe (Ox), dans le sens de O vers M_1 (vers la zone B).

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,e\,U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 50 \times 10^{3}}{1{,}67 \times 10^{-27}}} = 3{,}1 \times 10^{6}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$\vec{v}_1$: direction (Ox), sens de O vers M_1, valeur $v_1 = 3{,}1 \times 10^{6}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

COMPRENDRE
Cette vitesse vaut environ 1 % de celle de la lumière : les lois de Newton restent utilisables. L'énergie cinétique acquise est eU, soit 50 keV par traversée de la zone A.

À LA CALCULATRICE



Q4 Avec la deuxième loi de Newton, établir l'expression littérale du vecteur accélération $\vec{a}$ du proton en P_1 et donner sa direction et son sens.

Système {proton} ; référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Seule force prise en compte : $\vec{F}_m = e\,v\,B\,\vec{n}$ (poids négligé).

Deuxième loi de Newton : $\vec{F}_m = m\,\vec{a}$, soit $e\,v\,B\,\vec{n} = m\,\vec{a}$.

Le coefficient $\dfrac{e\,v\,B}{m}$ est positif : $\vec{a}$ a la direction et le sens de $\vec{n}$.

$\vec{a} = \dfrac{e\,v\,B}{m}\,\vec{n}$: direction du rayon $(\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1)$, sens de P_1 vers le centre C_1 (accélération centripète).

PIÈGE
Répondre « vers l'intérieur » sans nommer la droite : la direction est celle du rayon $(\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1)$, perpendiculaire à la vitesse.

Q5 Montrer que le mouvement circulaire du proton est uniforme et établir que sa vitesse a pour expression $v = \dfrac{e\,R_1\,B}{m}$.

D'après Q4 : $\vec{a} = 0\,\vec{t} + \dfrac{e\,v\,B}{m}\,\vec{n}$.

Dans la base de Frenet, sur le cercle de rayon R_1 : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{t} + \dfrac{v^2}{R_1}\,\vec{n}$.

Identification selon $\vec{t}$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. La valeur de la vitesse est constante : le mouvement circulaire est **uniforme**.

Identification selon $\vec{n}$: $\dfrac{v^2}{R_1} = \dfrac{e\,v\,B}{m}$. En divisant par v (non nulle) : $\dfrac{v}{R_1} = \dfrac{e\,B}{m}$.

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ (mouvement uniforme) et $v = \dfrac{e\,R_1\,B}{m}$, expression attendue.

PIÈGE
Écrire « $\vec{a}$ est constant » : ce vecteur change de direction en permanence. Seule sa composante tangentielle nulle prouve que le mouvement est uniforme.

MÉTHODE
Mouvement circulaire sous une force radiale : deuxième loi de Newton, écriture de $\vec{a}$ dans la base de Frenet, puis identification. Selon $\vec{t}$ on obtient l'uniformité, selon $\vec{n}$ la relation entre vitesse et rayon.

Q6 Calculer la valeur de la vitesse v et expliquer pourquoi on retrouve la valeur v_1 de la question Q3.

Données utiles $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C ; $R_1 = 1{,}9$ cm ; $B = 1{,}7$ T ; $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg ; $v_1 = 3{,}1 \times 10^{6}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (Q3)

$$v = \frac{e\,R_1\,B}{m} = \frac{1{,}6 \times 10^{-19} \times 1{,}9 \times 10^{-2} \times 1{,}7}{1{,}67 \times 10^{-27}} = 3{,}1 \times 10^{6}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

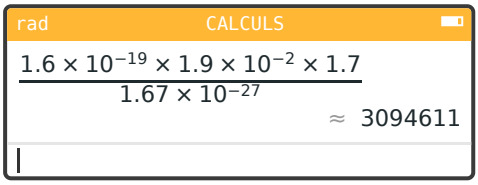
Le proton entre dans la zone B en M_1 avec la vitesse v_1. Son mouvement y est uniforme (Q5) : la valeur de sa vitesse reste celle de l'entrée sur tout le demi-cercle.

$v = 3{,}1 \times 10^{6}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = v_1$: la vitesse garde dans la zone B la valeur acquise à la sortie de la zone A.

COMPRENDRE

La force magnétique, perpendiculaire à la vitesse, ne travaille pas : elle courbe la trajectoire sans modifier l'énergie cinétique. Seul le champ électrique de la zone A augmente la vitesse.

À LA CALCULATRICE



Q7 À l'aide des figures 4 et 5, déterminer la valeur du vecteur accélération a_A entre N_1 et M_2 (retour dans la zone A), puis a_C entre M_2 et N_2 (zone C).

Données utiles $R_2 = 2{,}7$ cm ; figure 5 : en N_1, $t = 2{,}65 \times 10^{-8}$ s et $v = 3{,}1 \times 10^{6}$ m · s^{-1} ; en M_2, $t = 2{,}90 \times 10^{-8}$ s et $v = 4{,}4 \times 10^{6}$ m · s^{-1}

Entre N_1 et M_2 : le mouvement est rectiligne et le graphe de $v(t)$ est un segment de droite. L'accélération est constante, égale au coefficient directeur de ce segment :

$$a_A = \frac{v_{\mathrm{M}_2} - v_{\mathrm{N}_1}}{t_{\mathrm{M}_2} - t_{\mathrm{N}_1}} = \frac{(4{,}4 - 3{,}1) \times 10^{6}}{(2{,}90 - 2{,}65) \times 10^{-8}} = 5{,}2 \times 10^{14} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Entre M_2 et N_2 : le palier de la figure 5 montre que la vitesse est constante, $v_2 = 4{,}4 \times 10^{6}$ m · s^{-1}. Le mouvement est circulaire uniforme, de rayon R_2 : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ et l'accélération se réduit à sa composante normale.

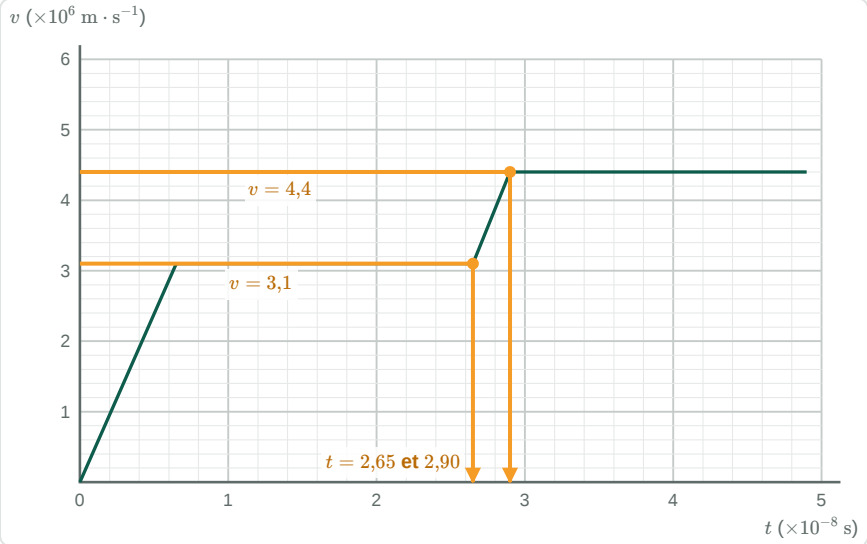
$$a_C = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{(4{,}4 \times 10^{6})^2}{2{,}7 \times 10^{-2}} = 7{,}2 \times 10^{14} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$a_A = 5{,}2 \times 10^{14}$ m · s^{-2} et $a_C = 7{,}2 \times 10^{14}$ m · s^{-2}

PIÈGE
Dire $a_C = 0$ parce que la vitesse est constante sur le palier. La valeur de la vitesse ne change pas, mais sa direction tourne : l'accélération normale $\dfrac{v^2}{R}$ n'est pas nulle.

COMPRENDRE
Le champ électrique a la même valeur qu'à l'aller : on attend a_A proche de $4{,}8 \times 10^{14}$ m · s^{-2} (Q1). L'écart vient de la lecture : la durée, très courte, n'est lue qu'à $0{,}05 \times 10^{-8}$ s près.

MÉTHODE
Vérification de a_C avec Q4 : $a_C = \dfrac{e\, v_2\, B}{m}$ donne aussi $7{,}2 \times 10^{14}$ m · s^{-2}.



Q7 · Figure 5 du sujet, avec les lectures aux points N1 et M2

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{4.4 \times 10^{6} - 3.1 \times 10^{6}}{2.90 \times 10^{-8} - 2.65 \times 10^{-8}} \approx 5.2 \times 10^{14}$$

$$\frac{(4.4 \times 10^{6})^{2}}{2.7 \times 10^{-2}} \approx 7.17037 \times 10^{14}$$