La masse de la Terre

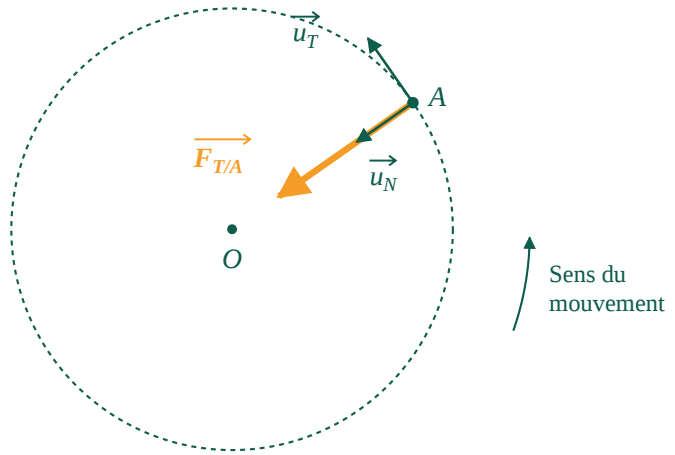
Bac 2024 Polynésie Jour 2 · Exercice 2 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q1 Reproduire la figure 1 et représenter, sans souci d'échelle, la force d'interaction gravitationnelle $\overrightarrow{F}_{T/A}$ exercée par la Terre sur le satellite.

La force $\overrightarrow{F}_{T/A}$ est attractive : son point d'application est A, sa direction est la droite (AO) et elle est orientée de A vers O.

Flèche partant de A et pointant vers O, dans le même sens que $\vec{u}_N$ (voir la figure).

PIÈGE
Faire partir la flèche du point O, ou la tracer selon $\vec{u}_T$. La force s'applique au satellite et n'a aucune composante tangentielle.



Q1 · Figure 1 complétée : la force (en orange) est portée par la droite (AO) et dirigée vers O

Q2 Donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F}_{T/A}$ en fonction de $\vec{u}_N$, G, M_T, m et r.

$$\overrightarrow{F}_{T/A} = G\frac{M_T\, m}{r^2}\vec{u}_N$$

COMPRENDRE
Le vecteur $\vec{u}_N$ est dirigé de A vers O, comme la force attractive : aucun signe « $-$ » n'apparaît dans cette base.

Q3 En appliquant la deuxième loi de Newton au centre de masse A du satellite, établir que sa vitesse a pour expression $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{r}}$.

Système {satellite}, de masse m constante ; référentiel géocentrique considéré comme galiléen ; seule force : $\overrightarrow{F}_{T/A}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $G\dfrac{M_T\, m}{r^2}\vec{u}_N = m\,\vec{a}$, d'où

$$\vec{a} = \frac{G\,M_T}{r^2}\vec{u}_N$$

Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon r, l'accélération dans le repère de Frenet s'écrit $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\vec{u}_N$.

Par identification selon $\vec{u}_N$: $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G\,M_T}{r^2}$, donc $v^2 = \dfrac{G\,M_T}{r}$.

$$v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}$$

COMPRENDRE
La masse m du satellite se simplifie : la vitesse sur une orbite donnée ne dépend que de M_T et de r.

MÉTHODE
Toujours la même trame : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis identification avec l'accélération du repère de Frenet.

Q4 À l'aide de l'expression de v et de la définition de la période de révolution T, vérifier que la troisième loi de Kepler s'écrit $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}$.

La période T est la durée d'un tour. À vitesse constante v, le satellite parcourt le périmètre $2\pi r$ de l'orbite : $T = \frac{2\pi r}{v}$.

En élevant au carré, avec $v^2 = \frac{G\,M_T}{r}$ (Q3) :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = 4\pi^2 r^2 \times \frac{r}{G\,M_T} = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,M_T}$$

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}}$$

COMPRENDRE
Le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ ne dépend que de l'astre attracteur : il est le même pour tous les satellites de la Terre. Mesurer T et r donne donc accès à M_T.

Q5 En s'aidant de la figure 2, calculer la valeur du demi-grand axe d de l'ellipse parcourue par le satellite Astérix.

Données utiles $D_{OB} = 6{,}89 \times 10^6$ m ; $D_{OC} = 8{,}07 \times 10^6$ m ; $BC = 2d$

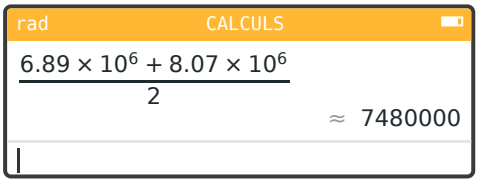
Les points B, O et C sont alignés, O entre B et C : $BC = D_{OB} + D_{OC} = 2d$, donc $d = \frac{D_{OB} + D_{OC}}{2}$.

$$d = \frac{6{,}89 \times 10^6 + 8{,}07 \times 10^6}{2}$$

$$\boxed{d = 7{,}48 \times 10^6 \text{ m}}$$

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme les deux distances de l'énoncé. Le centre O de la Terre est un foyer de l'ellipse, pas son milieu : $D_{OB} \neq D_{OC}$.

À LA CALCULATRICE



Q6 En exploitant l'expression de la période T de révolution d'un satellite en orbite elliptique, calculer la masse M_T de la Terre.

Données utiles $N = 1400$ révolutions en $\Delta t = 9{,}03 \times 10^6$ s ; $d = 7{,}48 \times 10^6$ m (Q5) ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}

Période de révolution : $T = \frac{\Delta t}{N} = \frac{9{,}03 \times 10^6}{1400} = 6{,}45 \times 10^3$ s.

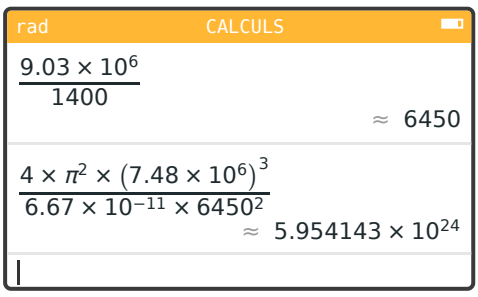
La relation $\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M_T}$ donne $M_T = \frac{4\pi^2 d^3}{G\,T^2}$.

$$M_T = \frac{4\pi^2 \times (7{,}48 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (6{,}45 \times 10^3)^2}$$

$$\boxed{M_T = 5{,}95 \times 10^{24} \text{ kg}}$$

PIÈGE
Utiliser Δt à la place de T : la durée donnée correspond à 1400 tours. Penser aussi au cube sur d et au carré sur T.

À LA CALCULATRICE



Q7 Exploiter la figure 3 pour déterminer, le plus précisément possible, la valeur de la période T des oscillations du pendule.

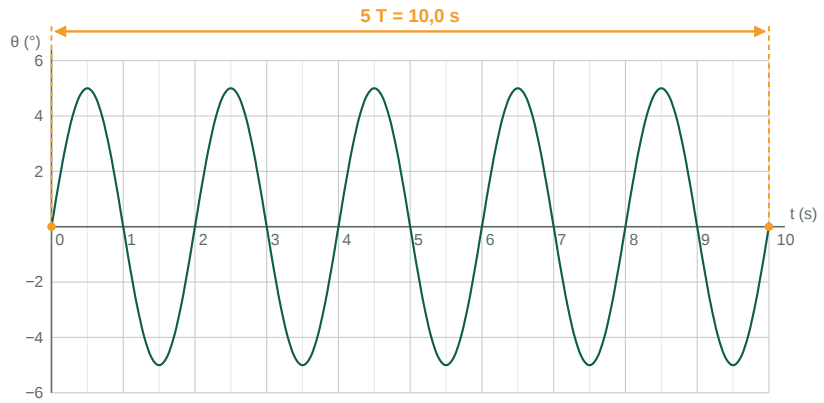
Pour gagner en précision, on mesure la durée du plus grand nombre possible de périodes. La courbe passe par $\theta = 0$ en montant à $t = 0$ s, puis de nouveau à $t = 10{,}0$ s, après 5 oscillations complètes.

$5\,T = 10{,}0$ s, donc $T = \dfrac{10{,}0}{5}$

$$\boxed{T = 2{,}0 \text{ s}}$$

PIÈGE
Mesurer l'écart entre deux passages successifs par zéro : c'est une demi-période (1,0 s). Il faut deux passages dans le même sens.

MÉTHODE
Mesurer plusieurs périodes puis diviser : l'erreur de lecture sur le graphique est répartie sur toutes les périodes comptées.



Q7 · Figure 3 du sujet : cinq périodes entières entre $t = 0$ et $t = 10{,}0$ s

Q8 Calculer la valeur de l'intensité de pesanteur g, sachant que $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$.

Données utiles $\ell = 1{,}0$ m ; $T = 2{,}0$ s (Q7)

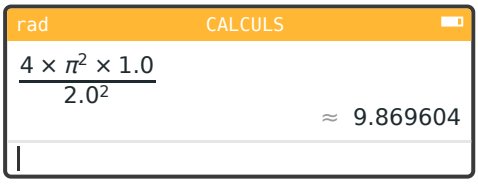
En élevant au carré : $T^2 = 4\pi^2 \dfrac{\ell}{g}$, donc $g = \dfrac{4\pi^2\,\ell}{T^2}$.

$$g = \frac{4\pi^2 \times 1{,}0}{2{,}0^2}$$

$$\boxed{g = 9{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement, comme ℓ et T. La valeur est cohérente avec $g \approx 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ connue à la surface de la Terre.

À LA CALCULATRICE



Q9 En considérant que le poids P du pendule est égal à la force d'interaction gravitationnelle F exercée par la Terre sur le pendule, déterminer la valeur M_T de la masse de la Terre.

Données utiles $R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km ; g (Q8) ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

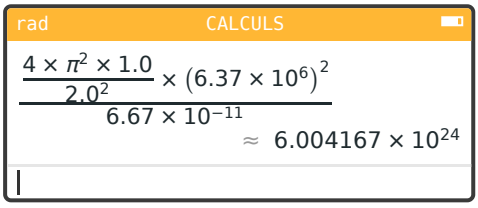
Pour le pendule de masse m : $P = m\,g$ et $F = G\dfrac{M_T\,m}{R_T^2}$.

$P = F$ donne $m\,g = G\dfrac{M_T\,m}{R_T^2}$, donc $M_T = \dfrac{g\,R_T^2}{G}$, avec $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m.

$$M_T = \frac{9{,}87 \times (6{,}37 \times 10^6)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}}$$

$$\boxed{M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\ \text{kg}}$$

À LA CALCULATRICE



PIÈGE

Laisser R_T en kilomètres : le résultat serait un million de fois trop petit. Convertir en mètres avant d'élever au carré.

COMPRENDRE

On garde la valeur non arrondie de g dans le calcul, puis deux chiffres significatifs. Les deux méthodes concordent : $5{,}95 \times 10^{24}$ kg (Q6) et $6{,}0 \times 10^{24}$ kg.