Vol en montgolfière

Bac 2024 Métropole Septembre Jour 2 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 56**

Q1 Montrer que la masse molaire M_{air} de l'air est voisine de $29 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Données utiles $M(\text{O}) = 16 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{N}) = 14 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$; air : 80 % de N_2 et 20 % de O_2 en quantité de matière

Une mole d'air contient 0,80 mol de N_2 et 0,20 mol de O_2 :

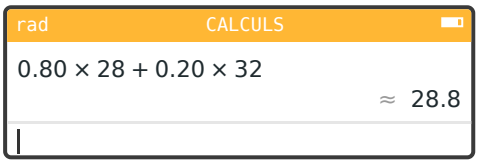
$$M_{air} = 0{,}80 \times 2\,M(\text{N}) + 0{,}20 \times 2\,M(\text{O})$$

$$M_{air} = 0{,}80 \times 28 \times 10^{-3} + 0{,}20 \times 32 \times 10^{-3} = 28{,}8 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\boxed{M_{air} = 28{,}8 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 29 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

PIÈGE
Oublier que le diazote et le dioxygène sont diatomiques : avec $M(\text{N})$ et $M(\text{O})$ seuls, on trouve $14{,}4 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, la moitié de la valeur attendue.

À LA CALCULATRICE



Q2 À l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits, exprimer la masse m_{int} de l'air intérieur en fonction de p_{int}, V, M_{air}, R et T_{int}.

Équation d'état du gaz parfait pour l'air de l'enveloppe : $p_{int}\,V = n\,R\,T_{int}$.

La quantité de matière d'air est $n = \dfrac{m_{int}}{M_{air}}$, donc $p_{int}\,V = \dfrac{m_{int}}{M_{air}}\,R\,T_{int}$.

$$\boxed{m_{int} = \frac{p_{int}\,V\,M_{air}}{R\,T_{int}}}$$

COMPRENDRE
À pression et volume fixés, chauffer l'air diminue m_{int} : une partie de l'air sort de l'enveloppe.

Q3 Exprimer le poids total P_{total} du système {montgolfière + air intérieur} en fonction de m_{ens} et m_{int}.

Le système a pour masse totale $m_{ens} + m_{int}$.

$$\boxed{P_{total} = (m_{ens} + m_{int})\,g}$$

Q4 Calculer la valeur de la poussée d'Archimède π_A qui s'exerce sur le système au niveau du sol.

Données utiles $\rho_{ext} = 1{,}2\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $V = 2{,}5 \times 10^3\ \text{m}^3$; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

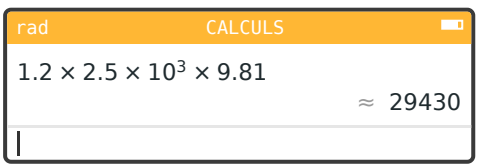
Le fluide dans lequel le ballon est plongé est l'air extérieur :

$$\pi_A = \rho_{ext}\,V\,g = 1{,}2 \times 2{,}5 \times 10^3 \times 9{,}81 = 2{,}943 \times 10^4\ \text{N}$$

$$\boxed{\pi_A = 2{,}9 \times 10^4\ \text{N}}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme ρ_{ext} et V. On garde $2{,}943 \times 10^4$ N pour la suite.

À LA CALCULATRICE



Q5 Établir l'expression de la température minimale T_{min} de l'air intérieur permettant le décollage, puis calculer sa valeur en prenant $p_{int} = p_{atm}$.

Données utiles $p_{int} = 1{,}0 \times 10^5$ Pa ; $V = 2{,}5 \times 10^3$ m^3 ; $M_{air} = 29 \times 10^{-3}$ kg · mol^{-1} ; $R = 8{,}31$ J · mol^{-1} · K^{-1} ; $m_{ens} = 500$ kg ; π_A (Q4)

Le ballon décolle si la poussée d'Archimède l'emporte sur le poids : $\pi_A \geqslant P_{total}$, soit $\pi_A \geqslant (m_{ens} + m_{int})\, g$.

D'où $m_{int} \leqslant \dfrac{\pi_A}{g} - m_{ens}$. Avec l'expression de Q2 :

$$\frac{p_{int}\, V\, M_{air}}{R\, T_{int}} \leqslant \frac{\pi_A}{g} - m_{ens} \quad \text{donc} \quad T_{int} \geqslant \frac{p_{int}\, V\, M_{air}}{R\left(\dfrac{\pi_A}{g} - m_{ens}\right)}$$

La plus petite température possible est bien $T_{min} = \dfrac{p_{int}\, V\, M_{air}}{R\left(\dfrac{\pi_A}{g} - m_{ens}\right)}$.

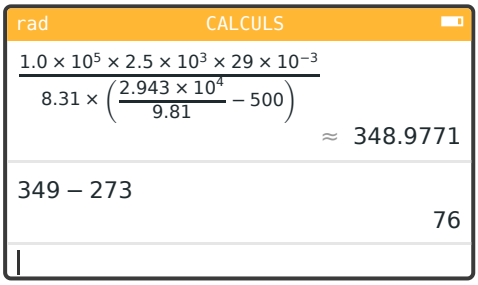
$$T_{min} = \frac{1{,}0 \times 10^5 \times 2{,}5 \times 10^3 \times 29 \times 10^{-3}}{8{,}31 \times \left(\dfrac{2{,}943 \times 10^4}{9{,}81} - 500\right)} = 349 \text{ K}$$

$T_{min} = 349$ K $\approx 3{,}5 \times 10^2$ K, soit environ 76 °C

PIÈGE
Prendre π_A arrondie à $2{,}9 \times 10^4$ N donne 355 K : la soustraction $\dfrac{\pi_A}{g} - m_{ens}$ amplifie l'arrondi. Remarquer que $\dfrac{\pi_A}{g} = \rho_{ext}\, V = 3{,}0 \times 10^3$ kg.

MÉTHODE
Pour diviser une inégalité par T_{int} ou par $\dfrac{\pi_A}{g} - m_{ens}$, vérifier que ces grandeurs sont positives : le sens de l'inégalité est alors conservé.

À LA CALCULATRICE



Q6 Déterminer la valeur de l'accélération du système, puis celle de sa vitesse au bout de 10 s et au bout de 1 minute d'ascension.

Données utiles $\pi_A = 2{,}9 \times 10^4$ N ; $m_{tot} = 2{,}8 \times 10^3$ kg ; $g = 9{,}81$ m · s^{-2} ; vitesse initiale nulle

Système {montgolfière + air intérieur}, de masse m_{tot} constante, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Forces : le poids $\vec{P}$ (vers le bas) et la poussée d'Archimède $\vec{\pi}_A$ (vers le haut).

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{\pi}_A = m_{tot}\, \vec{a}$. En projection sur l'axe (Oz) vertical ascendant :

$$-m_{tot}\, g + \pi_A = m_{tot}\, a_z \quad \text{donc} \quad a_z = \frac{\pi_A}{m_{tot}} - g$$

$a_z = \dfrac{2{,}9 \times 10^4}{2{,}8 \times 10^3} - 9{,}81 = 0{,}55$ m · s^{-2}, soit $a \approx 0{,}5$ m · s^{-2}.

L'accélération est constante et $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$: par intégration, $v_z(t) = a_z\, t + v_z(0)$, avec $v_z(0) = 0$. Donc $v_z(t) = a_z\, t$.

$v_z(10\text{ s}) = 0{,}5 \times 10 = 5$ m · s^{-1} et $v_z(60\text{ s}) = 0{,}5 \times 60 = 3 \times 10^1$ m · s^{-1}.

$a \approx 0{,}5$ m · s^{-2} ; $v(10\text{ s}) \approx 5$ m · s^{-1} ; $v(60\text{ s}) \approx 3 \times 10^1$ m · s^{-1}

PIÈGE
Oublier le signe du poids dans la projection, ou convertir la minute en secondes trop tard : $t = 60$ s.

COMPRENDRE
L'accélération est la différence de deux valeurs proches (10,4 et 9,81), connues à deux chiffres : un seul chiffre du résultat est fiable. Sans arrondir a, on obtiendrait 5,5 et 33 m · s^{-1}.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{2.9 \times 10^4}{2.8 \times 10^3} - 9.81 \approx 0.5471429$

$0.5 \times 10 \approx 5$

$0.5 \times 60 \approx 30$

Q7 Commenter les résultats de la question précédente et proposer une piste d'amélioration du modèle, en s'appuyant sur les vitesses en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Données utiles $v(10\ \mathrm{s}) \approx 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $v(60\ \mathrm{s}) \approx 3 \times 10^1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (Q6)

Conversion : $v(10\ \mathrm{s}) = 5 \times 3{,}6 = 18\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ et $v(60\ \mathrm{s}) = 30 \times 3{,}6 \approx 1{,}1 \times 10^2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Dans ce modèle, la vitesse augmente proportionnellement au temps, sans limite. Dépasser $100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ en une minute d'ascension verticale n'est pas réaliste pour une montgolfière, qui s'élève à quelques mètres par seconde au plus.

Piste d'amélioration : ajouter la force de frottement exercée par l'air, opposée au mouvement et d'autant plus grande que la vitesse est élevée (l'enveloppe est très large). L'accélération diminue alors au cours de la montée et la vitesse tend vers une valeur limite.

$18\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ puis environ $110\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$: vitesses irréalistes ; il faut tenir compte des frottements de l'air.

COMPRENDRE
Autre limite du modèle : avec l'altitude, la masse volumique de l'air extérieur diminue, donc la poussée d'Archimède aussi. La supposer constante surestime encore l'accélération.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$5 \times 3.6 \approx 18$

$30 \times 3.6 \approx 108$

Q8 Préciser, en justifiant, le sens du flux thermique à travers l'enveloppe simple couche du ballon.

Données utiles $\theta_{int} = 106\ ^\circ\mathrm{C}$; $\theta_{ext} = 21\ ^\circ\mathrm{C}$

Un transfert thermique se fait spontanément du corps le plus chaud vers le corps le plus froid. Or $\theta_{int} > \theta_{ext}$.

Le flux thermique est dirigé de l'air intérieur vers l'air extérieur.

Q9 Calculer la valeur du flux thermique ϕ_1 à travers une enveloppe simple couche.

Données utiles $R_{th,1} = 3{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}$; $\theta_{int} = 106\ ^\circ\mathrm{C}$; $\theta_{ext} = 21\ ^\circ\mathrm{C}$

$$\phi_1 = \frac{\theta_{int} - \theta_{ext}}{R_{th,1}} = \frac{106 - 21}{3{,}0 \times 10^{-4}} = 2{,}8 \times 10^5\ \mathrm{W}$$

$\phi_1 = 2{,}8 \times 10^5\ \mathrm{W} = 2{,}8 \times 10^2\ \mathrm{kW}$

COMPRENDRE
Un écart de température a la même valeur en °C et en K : aucune conversion.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{106 - 21}{3.0 \times 10^{-4}} \approx 283333.3$

Q10 Le flux thermique à travers l'enveloppe à double paroi est $\phi_2 = 165$ kW. Commenter.

Données utiles $\phi_1 = 2{,}8 \times 10^2$ kW (Q9)

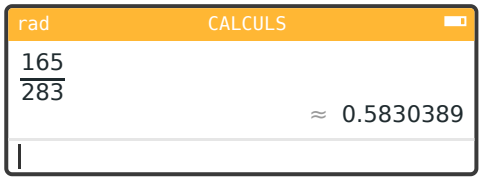
$\phi_2 < \phi_1$: pour le même écart de température, $\dfrac{\phi_2}{\phi_1} = \dfrac{165}{283} \approx 0{,}58$. La double paroi réduit les pertes thermiques d'environ 40 %.

La couche d'air emprisonnée entre les deux épaisseurs de nylon augmente la résistance thermique de l'enveloppe. Il faut donc brûler moins de carburant pour maintenir l'air intérieur à 106 °C.

$\phi_2 \approx 0{,}58\,\phi_1$: l'enveloppe double couche isole mieux et réduit la consommation de carburant.

MÉTHODE
« Commenter » une valeur : la comparer à une autre par un rapport chiffré, puis relier l'écart au contexte du sujet (ici l'économie de carburant annoncée).

À LA CALCULATRICE



Q11 Montrer que la température du système vérifie $\theta(t+\Delta t) - \theta(t) = \dfrac{h\,S\,(\theta_{ext} - \theta(t))\,\Delta t}{C}$.

Système {gourde + boisson}, incompressible, de capacité thermique C, qui n'échange pas de travail avec l'extérieur.

Premier principe entre t et $t+\Delta t$: $\Delta U = Q$.

- Variation d'énergie interne : $\Delta U = C\,\big(\theta(t+\Delta t) - \theta(t)\big)$.
- Transfert thermique reçu pendant Δt, durée assez courte pour que le flux soit considéré constant : $Q = \phi\,\Delta t = h\,S\,(\theta_{ext} - \theta(t))\,\Delta t$.

Donc $C\,\big(\theta(t+\Delta t) - \theta(t)\big) = h\,S\,(\theta_{ext} - \theta(t))\,\Delta t$.

$$\theta(t+\Delta t) - \theta(t) = \frac{h\,S\,(\theta_{ext} - \theta(t))\,\Delta t}{C}$$

COMPRENDRE
ϕ est le flux reçu par le système. Comme $\theta(t) > \theta_{ext}$, il est négatif : le système cède de l'énergie et sa température diminue.

MÉTHODE
Bilan d'énergie : 1) définir le système ; 2) premier principe ; 3) $\Delta U = C\,\Delta\theta$; 4) $Q = \phi\,\Delta t$. En divisant par Δt puis en le faisant tendre vers zéro, on obtient l'équation différentielle.

Q12 Déterminer les expressions littérales des constantes A et B en fonction de θ_0 et θ_{ext}, puis calculer leurs valeurs. Commenter.

Données utiles $\theta_0 = 48\ ^\circ\text{C}$; $\theta_{ext} = 21\ ^\circ\text{C}$; solutions de la forme $\theta(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + B$

Aux temps longs, $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ tend vers 0 et θ tend vers B. Or le système finit à la température de l'air extérieur : $B = \theta_{ext}$.

Condition initiale : $\theta(0) = A + B = \theta_0$, donc $A = \theta_0 - \theta_{ext}$.

$A = 48 - 21 = 27\ ^\circ\text{C}$ et $B = 21\ ^\circ\text{C}$.

Commentaire : on retrouve les deux coefficients de la modélisation numérique de la figure 2, $\theta(t) = 27 \times \mathrm{e}^{-0{,}000196 \times t} + 21$. Le modèle de la loi de Newton est en accord avec les mesures.

$A = \theta_0 - \theta_{ext} = 27\ ^\circ\text{C}$; $B = \theta_{ext} = 21\ ^\circ\text{C}$

PIÈGE
Écrire $A = \theta_0$: à $t = 0$, l'exponentielle vaut 1 et c'est la somme $A + B$ qui est égale à θ_0.

MÉTHODE
On peut aussi trouver B en reportant la solution dans l'équation différentielle : les termes en A s'annulent et il reste $\dfrac{B}{\tau} = \dfrac{\theta_{ext}}{\tau}$.

Q13 Déterminer la valeur du temps caractéristique τ à partir de la modélisation numérique de la figure 2.

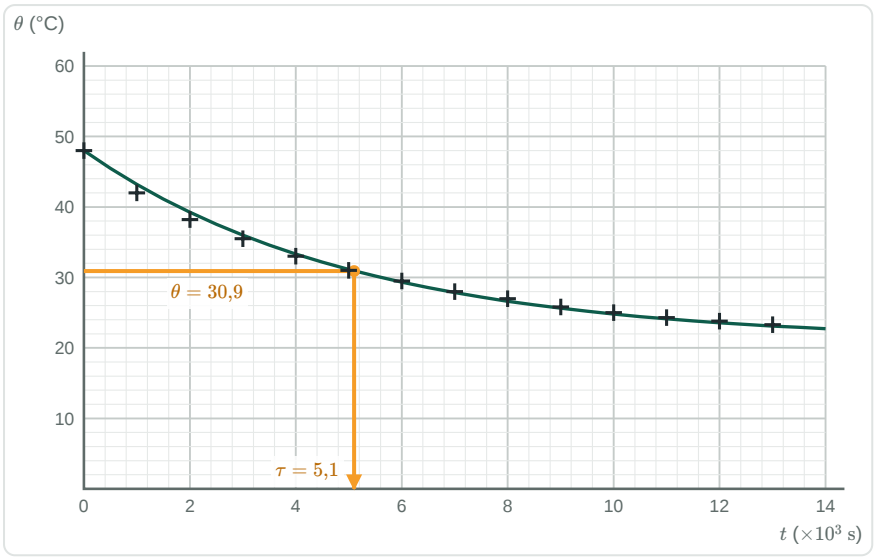
Données utiles modélisation : $\theta(t) = 27 \times \mathrm{e}^{-0{,}000196 \times t} + 21$ (t en s, θ en °C)

On identifie la modélisation à $\theta(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + B$: $\dfrac{1}{\tau} = 0{,}000196\ \text{s}^{-1}$.

$$\tau = \frac{1}{0{,}000196} = 5{,}10 \times 10^3\ \text{s}$$

$\tau = 5{,}10 \times 10^3$ s (environ 85 min)

COMPRENDRE
Vérification sur la courbe : à $t = \tau$, $\theta = \theta_{ext} + A\,\mathrm{e}^{-1} = 30{,}9$ °C. Cette température est atteinte vers 5×10^3 s, ce qui confirme la valeur.



À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{1}{0.000196} \approx 5102.041$

$21 + 27 \times e^{-1} \approx 30.93274$

Q13 · Figure 2 du sujet : à $t = \tau$, l'écart $\theta - \theta_{ext}$ ne vaut plus que 37 % de A

Q14 En déduire la valeur du coefficient h d'échange thermique surfacique, puis commenter le résultat à l'aide du tableau.

Données utiles $C = 2{,}1 \times 10^3\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$; $S = 0{,}042\ \text{m}^2$; $\tau = 5{,}10 \times 10^3\ \text{s}$ (Q13) ; sans courant d'air : h de 5 à 10 $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$; avec courant d'air : de 10 à 500

$\tau = \dfrac{C}{h\,S}$ donc $h = \dfrac{C}{\tau\,S}$.

$$h = \frac{2{,}1 \times 10^3}{5{,}10 \times 10^3 \times 0{,}042} = 9{,}8\ \text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

Cette valeur est comprise entre 5 et 10 $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$: elle correspond à un échange sans courant d'air, ce qui est cohérent avec une expérience réalisée en laboratoire.

$h = 9{,}8\ \text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$: échange sans courant d'air

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{2.1 \times 10^3}{5.10 \times 10^3 \times 0.042} \approx 9.803922$