Corrigé complet — Bac 2023 Métropole Jour 2

Physique-chimie, enseignement de spécialité **20 points** **3 h 30**

Ex 1	**étude de la vitamine C contenue dans les kiwis** Groupes caractéristiques · Spectroscopie infrarouge · Acide faible et constante d'acidité · Titrage indirect · Oxydoréduction · Vitesse volumique de disparition	9 pts	1 h 35	13 questions	p. 2
Ex 2	**Protection des crapauds** Deuxième loi de Newton · Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme · Équations horaires · Portée d'un tir · Hauteur maximale · Conservation de l'énergie mécanique	5 pts	53 min	9 questions	p. 7
Ex 3	**Modélisation d'un détecteur capacitif d'humidité** Capacité d'un condensateur plan · Circuit RC série · Équation différentielle du premier ordre · Temps caractéristique · Lecture graphique · Programme Python	6 pts	1 h 03	9 questions	p. 11

Comment s'en servir. Fais d'abord le sujet en temps limité, puis corrige-toi exercice par exercice. À gauche de chaque question, sur les carreaux : ce qu'il faut écrire sur ta copie. À droite : les pièges, ce qu'il faut comprendre et les méthodes.

étude de la vitamine C contenue dans les kiwis

Bac 2023 Métropole Jour 2 · Exercice 1 **9 points** **Durée conseillée 1 h 35**

Q1 Représenter la formule semi-développée de l'acide ascorbique, puis nommer les familles fonctionnelles associées aux groupes A et B.

Formule semi-développée : voir la figure (chaque sommet de la formule topologique est un atome de carbone, complété par des atomes d'hydrogène pour atteindre quatre liaisons).

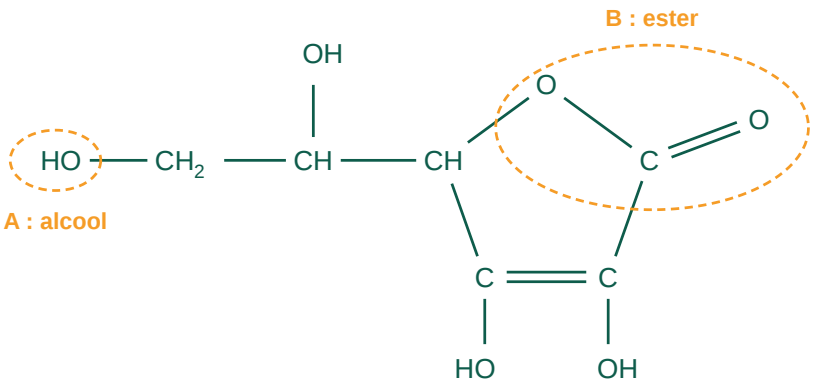
Groupe A : groupe hydroxyle $-\mathrm{OH}$ porté par un carbone tétraédrique, famille des **alcools**.

Groupe B : groupe $-\mathrm{CO}-\mathrm{O}^-$ lié à deux atomes de carbone, famille des **esters**.

A : famille des alcools ; B : famille des esters.

PIÈGE
Confondre B avec un acide carboxylique ou une cétone. L'atome de carbone du $\mathrm{C}=\mathrm{O}$ est lié à un oxygène lui-même lié à un carbone : c'est un ester (ici cyclique).

MÉTHODE
Vérifier la formule semi-développée en recomptant les atomes : on doit retrouver la formule brute $\mathrm{C_6H_8O_6}$, soit 6 C, 8 H et 6 O.



Q1 · Formule semi-développée de l'acide ascorbique, groupes A et B repérés

Q2 Justifier que le spectre infrarouge de la figure 1 est compatible avec la structure de l'acide ascorbique.

La molécule possède des liaisons $\mathrm{O}-\mathrm{H}$, $\mathrm{C}-\mathrm{H}$, $\mathrm{C}=\mathrm{O}$ et $\mathrm{C}=\mathrm{C}$. Sur le spectre, on repère :

- une bande forte et large entre 3200 et $3700\ \mathrm{cm^{-1}}$: liaisons $\mathrm{O}-\mathrm{H}$;
- des bandes vers $3000\ \mathrm{cm^{-1}}$, dans l'intervalle 2850 – $3100\ \mathrm{cm^{-1}}$: liaisons $\mathrm{C}-\mathrm{H}$;
- une bande forte et fine vers $1700\ \mathrm{cm^{-1}}$, dans l'intervalle 1650 – $1730\ \mathrm{cm^{-1}}$: liaison $\mathrm{C}=\mathrm{O}$.

La bande de la liaison $\mathrm{C}=\mathrm{C}$ (1620 – $1680\ \mathrm{cm^{-1}}$), faible, est attendue au même endroit que celle de $\mathrm{C}=\mathrm{O}$: elle peut être masquée.

Les bandes des liaisons $\mathrm{O}-\mathrm{H}$, $\mathrm{C}-\mathrm{H}$ et $\mathrm{C}=\mathrm{O}$ sont présentes : le spectre est compatible avec la structure.

PIÈGE
L'axe des nombres d'onde est gradué de droite à gauche et son échelle change à $2000\ \mathrm{cm^{-1}}$. Citer pour chaque bande l'intervalle du tableau et la liaison associée.

Q3 Déterminer la quantité de matière initiale n_0 d'acide ascorbique introduite dans la fiole jaugée.

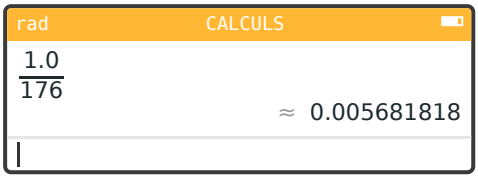
Données utiles $m_0 = 1{,}0$ g ; $M = 176$ g · mol^{-1}

$$n_0 = \frac{m_0}{M} = \frac{1{,}0}{176}$$

$n_0 = 5{,}7 \times 10^{-3}$ mol

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la masse 1,0 g, donnée la moins précise. Pour les calculs suivants, on garde la valeur non arrondie en mémoire.

À LA CALCULATRICE



Q4 Donner la définition d'un acide faible.

Un acide faible est un acide dont la réaction avec l'eau n'est pas totale : elle conduit à un état d'équilibre où l'acide et sa base conjuguée coexistent.

COMPRENDRE
En termes de taux d'avancement final : $\tau < 1$ pour un acide faible, $\tau = 1$ pour un acide fort.

Q5 Montrer que l'acide ascorbique est un acide faible dans l'eau.

Données utiles n_0 (Q3) ; $V_{\text{fiole}} = 50$ mL ; pH $= 2{,}6$; $c^\circ = 1{,}0$ mol · L^{-1}

Concentration en acide apporté : $C = \dfrac{n_0}{V_{\text{fiole}}} = \dfrac{5{,}7 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-3}} = 0{,}11$ mol · L^{-1}.

Si la réaction était totale, on aurait $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\max} = C$.

Or, à l'état final : $[\text{H}_3\text{O}^+]_f = c^\circ \times 10^{-\text{pH}} = 10^{-2{,}6} = 2{,}5 \times 10^{-3}$ mol · L^{-1}.

Taux d'avancement final :

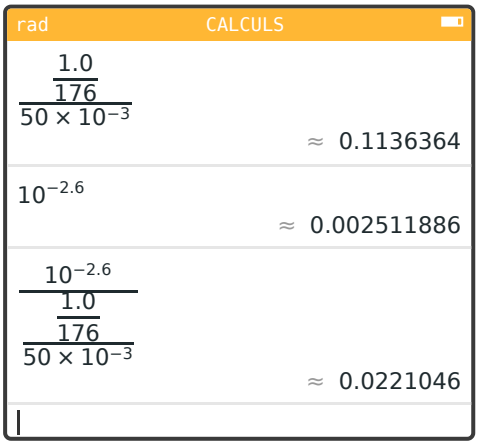
$$\tau = \frac{x_f}{x_{\max}} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_f}{C} = \frac{2{,}5 \times 10^{-3}}{0{,}11} = 0{,}022$$

$\tau \approx 2{,}2\ \% < 100\ \%$: la réaction avec l'eau n'est pas totale, l'acide ascorbique est un acide faible.

PIÈGE
Laisser le volume en mL : 50 mL $= 50 \times 10^{-3}$ L.

MÉTHODE
Autre argument possible : un acide fort de même concentration donnerait $\text{pH} = -\log(C/c^\circ) = 0{,}94$. Le pH mesuré (2,6) est plus élevé : la réaction n'est pas totale.

À LA CALCULATRICE



Q6 Donner l'expression de la constante d'acidité K_A du couple en fonction des concentrations à l'équilibre et de c°, puis montrer que le $\mathrm{p}K_A$ est proche de $4{,}2$.

Données utiles $C = 0{,}11\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ et $[\mathrm{H_3O^+}]_f = 2{,}5\times10^{-3}\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}}$ (Q5)

$$K_A = \frac{[\mathrm{C_6H_7O_6^-}]\times[\mathrm{H_3O^+}]}{[\mathrm{C_6H_8O_6}]\times c^\circ}$$

D'après l'équation, il se forme autant d'ions $\mathrm{C_6H_7O_6^-}$ que d'ions $\mathrm{H_3O^+}$, et chaque ion formé consomme une molécule d'acide :

$[\mathrm{C_6H_7O_6^-}] = [\mathrm{H_3O^+}]_f$ et $[\mathrm{C_6H_8O_6}] = C - [\mathrm{H_3O^+}]_f$

$$K_A = \frac{[\mathrm{H_3O^+}]_f^2}{(C-[\mathrm{H_3O^+}]_f)\times c^\circ} = \frac{(2{,}5\times10^{-3})^2}{(0{,}11-2{,}5\times10^{-3})\times 1{,}0} = 5{,}7\times10^{-5}$$

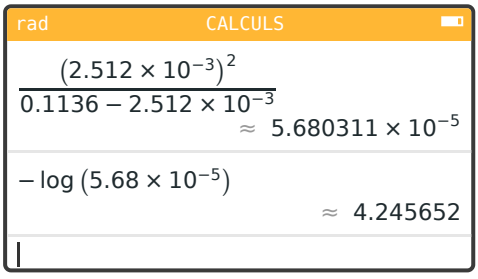
$$\mathrm{p}K_A = -\log(K_A) = -\log(5{,}7\times10^{-5})$$

$\mathrm{p}K_A = 4{,}2$: on retrouve bien la valeur attendue, $4{,}2$.

PIÈGE
Écrire $[\mathrm{C_6H_8O_6}] = C$ sans justifier. Ici l'écart est faible (2 %), mais la concentration à l'équilibre est $C - [\mathrm{H_3O^+}]_f$: il faut le dire.

MÉTHODE
Un tableau d'avancement en concentrations donne les mêmes relations : à l'état final, $x_f/V = [\mathrm{H_3O^+}]_f$ pour les deux produits et $C - x_f/V$ pour l'acide.

À LA CALCULATRICE



Q7 Déterminer l'espèce acide-base prédominante associée à l'acide ascorbique dans le jus d'un kiwi jaune.

Données utiles $\mathrm{pH_{jus}} = 3{,}5$; $\mathrm{p}K_A = 4{,}2$ (Q6)

Pour $\mathrm{pH} < \mathrm{p}K_A$, la forme acide du couple prédomine. Ici $3{,}5 < 4{,}2$.

L'espèce prédominante dans le jus est la forme acide, l'acide ascorbique $\mathrm{C_6H_8O_6}$.

MÉTHODE
Tracer l'axe de pH avec la frontière à $\mathrm{p}K_A$: l'acide prédomine à gauche, la base conjuguée à droite. On place ensuite le pH de la solution.

Q8 En exploitant le résultat du titrage, montrer que la quantité de matière de diiode dosé lors de l'étape 2 est égale à $4{,}13\times10^{-4}$ mol.

Données utiles $C_2 = 5{,}00\times10^{-2}\ \mathrm{mol\cdot L^{-1}}$; $V_2 = 16{,}5$ mL

À l'équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques de la réaction de titrage
$\mathrm{I_2 + 2\,S_2O_3^{2-} \longrightarrow S_4O_6^{2-} + 2\,I^-}$:

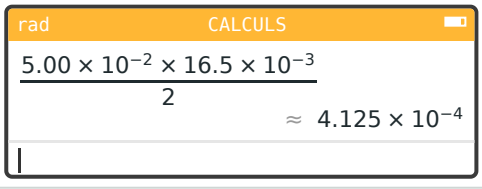
$$\frac{n(\mathrm{I_2})_{\text{dosé}}}{1} = \frac{n(\mathrm{S_2O_3^{2-}})_{\text{versé}}}{2} \quad \text{soit} \quad n(\mathrm{I_2})_{\text{dosé}} = \frac{C_2\times V_2}{2}$$

$$n(\mathrm{I_2})_{\text{dosé}} = \frac{5{,}00\times10^{-2}\times16{,}5\times10^{-3}}{2}$$

$n(\mathrm{I_2})_{\text{dosé}} = 4{,}13\times10^{-4}$ mol, valeur attendue.

PIÈGE
Oublier le coefficient 2 devant $\mathrm{S_2O_3^{2-}}$: il faut deux ions thiosulfate pour une molécule de diiode, d'où la division par 2.

À LA CALCULATRICE



Q9 Calculer la masse d'acide ascorbique contenue dans un kiwi jaune, puis déterminer combien il faudrait en manger pour satisfaire les besoins journaliers d'un adulte.

Données utiles $C_1 = 2{,}9 \times 10^{-2}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $V_1 = 20{,}0$ mL ; $n(\text{I}_2)_{\text{dosé}} = 4{,}13 \times 10^{-4}$ mol (Q8) ; $V = 50{,}0$ mL ; $V_S = 250$ mL ; $M = 176\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; apport recommandé : 110 mg par jour

Diiode introduit à l'étape 1 : $n(\text{I}_2)_i = C_1 \times V_1 = 2{,}9 \times 10^{-2} \times 20{,}0 \times 10^{-3} = 5{,}8 \times 10^{-4}$ mol.

Diiode consommé par l'acide ascorbique : $n(\text{I}_2)_{\text{cons}} = n(\text{I}_2)_i - n(\text{I}_2)_{\text{dosé}} = 5{,}8 \times 10^{-4} - 4{,}13 \times 10^{-4} = 1{,}7 \times 10^{-4}$ mol.

D'après l'équation de l'étape 1, une mole d'acide ascorbique réagit avec une mole de diiode. Dans la prise d'essai $V = 50{,}0$ mL : $n(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6)_V = n(\text{I}_2)_{\text{cons}} = 1{,}7 \times 10^{-4}$ mol.

La solution S (250 mL) contient tout le jus du kiwi, et on en a prélevé 50,0 mL :

$n_{\text{kiwi}} = \dfrac{250}{50{,}0} \times n(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6)_V = 5 \times 1{,}7 \times 10^{-4} = 8{,}4 \times 10^{-4}$ mol (calcul mené sans arrondi intermédiaire).

$m_{\text{kiwi}} = n_{\text{kiwi}} \times M = 8{,}4 \times 10^{-4} \times 176 = 0{,}15$ g, soit environ 150 mg.

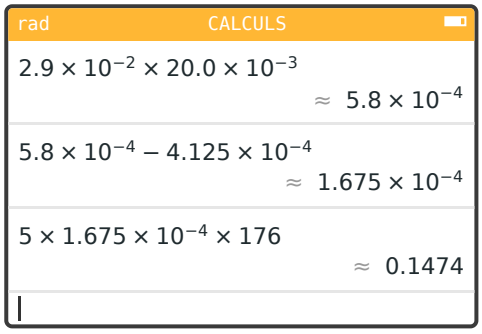
Comme $150\ \text{mg} > 110\ \text{mg}$, un kiwi apporte plus que le besoin journalier.

$m_{\text{kiwi}} \approx 0{,}15$ g : un seul kiwi jaune suffit à couvrir les besoins journaliers d'un adulte.

PIÈGE
Oublier le facteur 5 : seul un cinquième de la solution S est dosé. Sans lui, on trouve 29 mg et on conclut à tort qu'il faut quatre kiwis.

MÉTHODE
Dosage par excès : quantité consommée = quantité introduite − quantité restante, celle-ci étant donnée par le titrage. On remonte ensuite de la prise d'essai à l'échantillon entier.

À LA CALCULATRICE



Q10 Expliquer sans calcul si le kiwi vert contient plus ou moins d'acide ascorbique que le kiwi jaune.

Données utiles $V_2' = 19{,}7$ mL ; $V_2 = 16{,}5$ mL

$V_2' > V_2$: il faut davantage de thiosulfate pour atteindre l'équivalence, donc il reste plus de diiode après l'étape 1. La quantité de diiode introduite étant la même, l'acide ascorbique du kiwi vert en a consommé moins.

Le kiwi vert contient moins d'acide ascorbique que le kiwi jaune de même masse.

PIÈGE
Raisonner comme pour un titrage direct (« volume plus grand donc plus d'acide »). Ici on titre le réactif restant : plus le volume équivalent est grand, moins il y avait d'espèce à doser.

Q11 À l'aide des demi-équations électroniques des deux couples, établir l'équation de la réaction entre l'acide ascorbique et le bleu de méthylène BM^+.

Données utiles couples $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6$ / $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$ et BM^+ / BMH

Oxydation de l'acide ascorbique : $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6 = \text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6 + 2\,\text{H}^+ + 2\,\text{e}^-$

Réduction du bleu de méthylène : $\text{BM}^+ + \text{H}^+ + 2\,\text{e}^- = \text{BMH}$

Les deux demi-équations échangent le même nombre d'électrons : on les additionne, puis on simplifie un ion H^+ présent de chaque côté.

$$\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6\,(\text{aq}) + \text{BM}^+\,(\text{aq}) \longrightarrow \text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6\,(\text{aq}) + \text{BMH}\,(\text{aq}) + \text{H}^+\,(\text{aq})$$

PIÈGE
Écrire $\text{BM}^+ + \text{H}^+ + \text{e}^- = \text{BMH}$: les charges ne sont pas équilibrées. Il faut deux électrons pour passer d'une charge $+2$ à une charge nulle.

MÉTHODE
Pour une demi-équation : équilibrer les atomes autres que O et H, puis O avec H_2O, H avec H^+, enfin les charges avec des électrons. Vérifier les charges de l'équation finale : $+1$ de chaque côté.

Q12 Exprimer la vitesse volumique de disparition de l'acide ascorbique en fonction de C_{ASC}, puis déterminer sa valeur à l'instant initial à 28 °C.

Données utiles figure 2, courbe à 28 °C : $C_{ASC}(0) = 1{,}10 \times 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$v_{\text{disp}}(t) = -\frac{\text{d}C_{ASC}}{\text{d}t}$$

C'est l'opposé du coefficient directeur de la tangente à la courbe $C_{ASC}(t)$ à l'instant considéré.

On trace la tangente à la courbe à 28 °C en $t = 0$: elle passe par les points $(0\ ;\ 1{,}10 \times 10^{-4})$ et $(18\ ;\ 0)$.

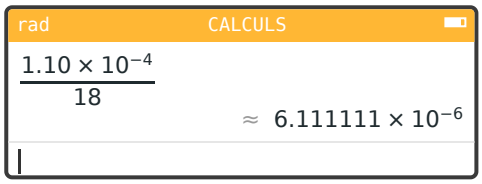
$$v_{\text{disp}}(0) = -\frac{0 - 1{,}10 \times 10^{-4}}{18 - 0}$$

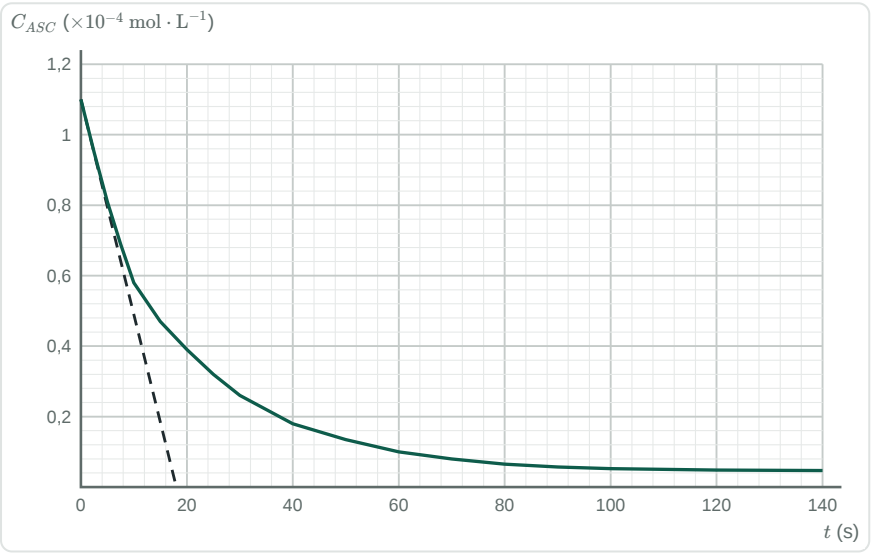
$$\boxed{v_{\text{disp}}(0) \approx 6 \times 10^{-6}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Oublier le signe « − » : la concentration diminue, la dérivée est négative, mais une vitesse de disparition est positive. Ne pas confondre non plus la tangente avec la corde joignant les deux premiers points.

COMPRENDRE
Le tracé d'une tangente est peu précis : selon le tracé, elle coupe l'axe des temps entre 15 et 20 s. Toute valeur comprise entre $5{,}5 \times 10^{-6}$ et $7 \times 10^{-6}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ est cohérente ; un seul chiffre significatif suffit.

À LA CALCULATRICE





Q12 · Courbe à 28 °C de la figure 2 et tangente à l'origine (en tirets)

Q13 En utilisant les courbes de la figure 2, identifier en justifiant deux facteurs cinétiques de la réaction.

Température : à 40 °C, la concentration C_{ASC} décroît plus vite qu'à 28 °C (à $t = 20$ s, environ $0{,}15 \times 10^{-4}$ contre $0{,}39 \times 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$). La réaction est plus rapide quand la température est plus élevée.

Concentration du réactif : sur chaque courbe, la tangente est de moins en moins inclinée au cours du temps. La vitesse de disparition diminue à mesure que la concentration en acide ascorbique diminue.

Les deux facteurs cinétiques sont la température et la concentration des réactifs.

COMPRENDRE
Interprétation microscopique : une température ou une concentration plus élevée augmente la fréquence des chocs efficaces entre les entités réactives.

Protection des crapauds

Bac 2023 Métropole Jour 2 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Établir les expressions littérales des composantes a_x et a_z du vecteur accélération $\vec{a}_G$ du centre de masse du crapaud.

Système {crapaud}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ uniquement, les frottements de l'air étant négligés.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}_G$, donc $\vec{a}_G = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, l'axe (Oz) est orienté vers le haut :

$a_x = 0$ et $a_z = -g$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de a_z : l'axe (Oz) pointe vers le haut alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas. Donner le résultat sans système, référentiel ni bilan des forces coûte aussi des points.

COMPRENDRE
La masse se simplifie : dans le vide, tous les corps ont la même accélération $\vec{g}$, qu'il s'agisse d'un crapaud ou d'une balle.

Q2 Établir les expressions littérales des composantes $v_x(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}_G$ du centre de masse du crapaud.

Par définition $\vec{a}_G = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de $a_x = 0$ et de $a_z = -g$.

$$v_x(t) = C_1 \qquad v_z(t) = -g\,t + C_2$$

Conditions initiales : à $t = 0$, $\vec{v}_G = \vec{v}_0$ de composantes $v_0\cos(\alpha)$ selon (Ox) et $v_0\sin(\alpha)$ selon (Oz). Donc $C_1 = v_0\cos(\alpha)$ et $C_2 = v_0\sin(\alpha)$.

$v_x(t) = v_0\cos(\alpha)$ et $v_z(t) = -g\,t + v_0\sin(\alpha)$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou échanger sinus et cosinus. L'angle α est mesuré depuis l'horizontale : le côté adjacent, donc le cosinus, est sur (Ox).

MÉTHODE
Accélération, puis vitesse, puis position : à chaque étape, on prend une primitive et on fixe la constante avec la valeur à $t = 0$.

Q3 Montrer que les équations horaires s'écrivent $x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$.

Par définition $\vec{v}_G = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de $v_x(t)$ et de $v_z(t)$.

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t + C_3 \qquad z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + C_4$$

Conditions initiales : à $t = 0$, G est en O, donc $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$, ce qui donne $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$.

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$: ce sont les expressions attendues.

PIÈGE
Dans un « montrer que », écrire directement le résultat de l'énoncé ne rapporte rien : il faut faire apparaître les constantes C_3 et C_4 et justifier qu'elles sont nulles.

Q4 Établir l'expression de la durée du saut du crapaud, notée t_{saut}, en fonction de v_0, g et α.

Le saut se termine quand le crapaud retombe au sol : $z(t_{saut}) = 0$.

$$-\frac{1}{2}\,g\,t_{saut}^2 + v_0\sin(\alpha)\,t_{saut} = 0 \quad \text{soit} \quad t_{saut}\left(-\frac{1}{2}\,g\,t_{saut} + v_0\sin(\alpha)\right) = 0$$

La solution $t_{saut} = 0$ correspond au départ ; on garde l'autre :

$\frac{1}{2}\,g\,t_{saut} = v_0\sin(\alpha)$.

$$\boxed{t_{saut} = \frac{2\,v_0\sin(\alpha)}{g}}$$

PIÈGE
Diviser par t_{saut} sans dire que l'on écarte la solution nulle. Mieux vaut factoriser et nommer les deux solutions : l'instant du départ et celui de la réception.

COMPRENDRE
La durée du saut ne dépend que de la composante verticale $v_0\sin(\alpha)$ de la vitesse initiale : c'est le double de la durée de la montée.

Q5 À l'aide de $x(t)$ et de t_{saut}, montrer que la vitesse permettant un saut de longueur d est $v_0 = \sqrt{\dfrac{g\,d}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}}$.

Données utiles $t_{saut} = \dfrac{2\,v_0\sin(\alpha)}{g}$ (Q4)

La longueur du saut est l'abscisse de G à la date t_{saut} : $d = x(t_{saut})$.

$$d = v_0\cos(\alpha) \times \frac{2\,v_0\sin(\alpha)}{g} = \frac{2\,v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$$

On isole v_0^2 : $\quad v_0^2 = \dfrac{g\,d}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$

Une norme est positive, on garde la racine positive :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{g\,d}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}}} \text{ : c'est la relation attendue.}$$

MÉTHODE
Portée d'un tir depuis le sol : 1) date de retour au sol avec $z(t) = 0$; 2) report de cette date dans $x(t)$. La même démarche sert pour un ballon, un projectile ou un jet d'eau.

Q6 Les crapauds les plus puissants sautent une longueur égale à 20 fois leur taille. Calculer la valeur de v_0 qu'ils atteignent pour $\alpha = 45^\circ$.

Données utiles taille moyenne : 10 cm ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; relation de Q5

Longueur du saut : $d = 20 \times 10\ \text{cm} = 2{,}0 \times 10^2\ \text{cm} = 2{,}0\ \text{m}$.

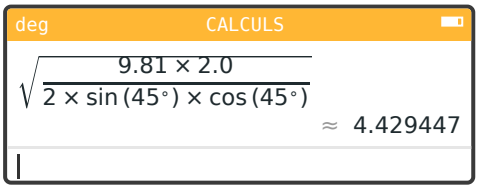
$$v_0 = \sqrt{\frac{g\,d}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \times 2{,}0}{2 \times \sin(45^\circ) \times \cos(45^\circ)}}$$

$$\boxed{v_0 = 4{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Laisser d en centimètres alors que g est en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, ou calculer avec la calculatrice réglée en radians : vérifier que $\sin(45^\circ)$ affiche bien 0,707.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la taille du crapaud (10 cm), donnée la moins précise. Pour la suite, on garde la valeur non arrondie en mémoire.

À LA CALCULATRICE



Q7 Pour un saut vertical ($\alpha = 90^\circ$), établir que la hauteur maximale a pour expression $z_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2\,g}$.

Pour $\alpha = 90^\circ$, $\sin(\alpha) = 1$: $v_z(t) = -g\,t + v_0$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t$.

Au sommet, à la date $t_{\max}$, la vitesse verticale s'annule : $-g\,t_{\max} + v_0 = 0$, donc $t_{\max} = \dfrac{v_0}{g}$.

$$z_{\max} = z(t_{\max}) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \times \frac{v_0}{g} = -\frac{v_0^2}{2\,g} + \frac{v_0^2}{g}$$

$z_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2\,g}$: c'est l'expression attendue.

PIÈGE
Chercher le sommet avec $z(t) = 0$: cette condition donne le retour au sol. Le sommet correspond à $v_z = 0$.

MÉTHODE
Autre voie, plus courte : le poids est la seule force, l'énergie mécanique se conserve. Entre le départ et le sommet, $\dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 = m\,g\,z_{\max}$, d'où le résultat.

Q8 En déduire la valeur de la hauteur de barrière minimale H_{champion} qui arrête les crapauds les plus puissants, sautant verticalement avec la vitesse v_0 de la question Q6.

Données utiles $v_0 = 4{,}43\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur non arrondie (Q6) ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

La barrière doit être au moins aussi haute que le saut vertical le plus haut : $H_{\text{champion}} = z_{\max}$.

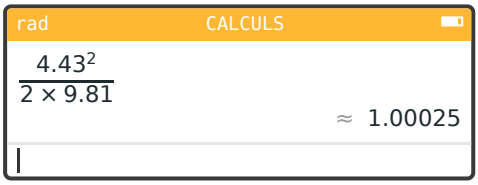
$$H_{\text{champion}} = \frac{v_0^2}{2\,g} = \frac{4{,}43^2}{2 \times 9{,}81}$$

$H_{\text{champion}} = 1{,}0\ \text{m}$

PIÈGE
Avec la valeur arrondie $4{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, on trouve 0,99 m : l'écart vient de l'arrondi. Réutiliser le résultat mémorisé de la calculatrice.

COMPRENDRE
Comme $2\sin(45^\circ)\cos(45^\circ) = 1$, on a $v_0^2 = g\,d$ et donc $H_{\text{champion}} = \dfrac{d}{2}$: la hauteur du saut vertical vaut la moitié de la longueur du meilleur saut à 45°.

À LA CALCULATRICE



Q9 Les barrières mesurent en réalité 50 à 60 cm. Donner un argument expliquant pourquoi on installe des barrières d'une hauteur inférieure à H_{champion}.

Données utiles $H_{\text{champion}} = 1{,}0$ m (Q8)

La hauteur de 1,0 m correspond à un cas extrême : un crapaud parmi les plus puissants, qui sauterait exactement à la verticale.

Or un crapaud qui se déplace saute vers l'avant, en oblique : pour une même vitesse initiale, la hauteur atteinte est alors plus faible. Pour $\alpha = 45^\circ$ par exemple, la composante verticale de la vitesse est $v_0 \sin(45^\circ)$ et la hauteur atteinte vaut $\dfrac{(v_0 \sin(45^\circ))^2}{2\,g} = 0{,}50$ m.

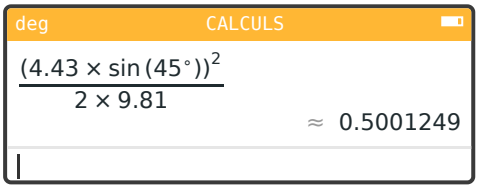
De plus, la plupart des crapauds sautent moins loin que 20 fois leur taille.

Une barrière de 50 à 60 cm suffit à arrêter la quasi-totalité des crapauds, pour un coût et un encombrement moindres.

COMPRENDRE

Un seul argument pertinent suffit pour avoir les points. Le calcul à 45° n'est pas exigé : il montre simplement que la hauteur réelle des barrières est cohérente avec le modèle.

À LA CALCULATRICE



Modélisation d'un détecteur capacitif d'humidité

Bac 2023 Métropole Jour 2 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q1 Prévoir qualitativement le sens de variation de la capacité C du détecteur quand la teneur en eau d'un sol argileux augmente.

D'après la figure 2, la permittivité ε du sol argileux augmente avec sa teneur en eau.

Or $C = \dfrac{\varepsilon\, S}{d}$, avec S et d fixés : C est proportionnelle à ε.

Quand la teneur en eau augmente, la capacité C **augmente**.

MÉTHODE
« Prévoir qualitativement » : aucun calcul, mais un raisonnement en deux temps. D'abord ce que montre le graphique, puis la relation qui relie la grandeur lue à la grandeur demandée.

Q2 Montrer que u_C obéit à l'équation différentielle $E = \tau \times \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$ et exprimer le temps caractéristique τ en fonction de R et de C.

Interrupteur fermé, la loi des mailles donne : $E = u_R + u_C$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

Pour le condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$, avec C constante, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

En reportant : $E = R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$.

C'est l'équation proposée, par identification :

$$E = \tau\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \text{ avec } \tau = R\,C$$

PIÈGE
Passer directement de la loi des mailles à l'équation finale. Les trois relations (mailles, Ohm, $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$) sont attendues une par une.

COMPRENDRE
Sur le schéma, les flèches u_R et u_C sont opposées au sens de i : convention récepteur, donc aucun signe « $-$ » dans la loi d'Ohm ni dans $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Q3 Vérifier que $u_C(t) = E \times \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est solution de l'équation différentielle et satisfait à la condition imposée à $t = 0$ s.

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E \times \dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On calcule le second membre de l'équation :

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = E$$

L'égalité est vraie à chaque instant : la fonction est solution.

Condition initiale : $u_C(0) = E \times \left(1 - \mathrm{e}^{0}\right) = E \times (1 - 1) = 0$, ce qui correspond au condensateur déchargé à $t = 0$ s.

$u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ vérifie l'équation différentielle et $u_C(0) = 0$ V.

PIÈGE
Erreur de signe dans la dérivée : $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ se dérive en $-\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, et le signe « $-$ » placé devant l'exponentielle rend la dérivée de u_C positive.

MÉTHODE
« Vérifier » ne demande pas de résoudre l'équation : on dérive la fonction proposée, on remplace dans un membre et on retrouve l'autre. Puis on teste la condition initiale.

Q4 Montrer que la valeur de u_C à l'instant τ est approximativement $u_C(\tau) = 0{,}63 \times E$.

On remplace t par τ :

$u_C(\tau) = E \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\tau/\tau}\right) = E \times \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$

Or $1 - \mathrm{e}^{-1} = 0{,}632$.

$$u_C(\tau) = 0{,}632 \times E \approx 0{,}63 \times E$$

COMPRENDRE
Ce résultat ne dépend ni de R ni de C : repérer l'instant où u_C atteint 63 % de E suffit pour mesurer τ.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1 - e^{-1}$

≈ 0.6321206

Q5 Montrer que le temps caractéristique τ du circuit RC doit être au minimum de l'ordre de 200 µs.

Données utiles 52 000 valeurs de tension relevées par seconde ; au moins 10 valeurs avant d'atteindre τ

Durée entre deux mesures successives : $T_e = \dfrac{1}{52\,000} = 1{,}9 \times 10^{-5}$ s.

Il faut au moins 10 mesures avant l'instant τ, donc :

$$\tau \geqslant 10 \times T_e = \frac{10}{52\,000} = 1{,}9 \times 10^{-4}\ \text{s}$$

$\tau_{\min} = 1{,}9 \times 10^{-4}$ s $= 190$ µs, soit de l'ordre de 200 µs.

PIÈGE
Conversion : $1\ \mu\text{s} = 10^{-6}$ s. Écrire $1{,}9 \times 10^{-4}$ s $= 19$ µs fait manquer la valeur attendue d'un facteur dix.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : 52 000 en porte deux, le résultat aussi. « De l'ordre de » autorise l'arrondi de 190 µs à 200 µs.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{10}{52\,000}$

$\approx 1.923077 \times 10^{-4}$

Q6 À l'aide de la contrainte sur le temps caractéristique τ, déterminer la teneur minimale en eau d'un sol argileux mesurable avec ce dispositif.

Données utiles $S = 1{,}0 \times 10^{-1}\ \text{m}^2$; $d = 1{,}0 \times 10^{-2}$ m ; $R = 2{,}2 \times 10^{5}\ \Omega$; $\tau_{\min} = 200$ µs (Q5) ; figure 2

On relie τ à la permittivité : $\tau = RC$ (Q2) et $C = \dfrac{\varepsilon S}{d}$,

donc $\tau = \dfrac{R\varepsilon S}{d}$.

La contrainte $\tau \geqslant \tau_{\min}$ s'écrit : $\varepsilon \geqslant \dfrac{\tau_{\min} d}{RS}$.

$$\varepsilon_{\min} = \frac{200 \times 10^{-6} \times 1{,}0 \times 10^{-2}}{2{,}2 \times 10^{5} \times 1{,}0 \times 10^{-1}} = 9{,}1 \times 10^{-11}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

soit $\varepsilon_{\min} = 0{,}91 \times 10^{-10}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Sur la figure 2, l'ordonnée $0{,}91$ correspond à une teneur en eau d'environ 15 %. Comme ε augmente avec la teneur en eau, la contrainte impose une teneur supérieure à cette valeur.

Teneur en eau minimale mesurable : environ 15 %.

PIÈGE
L'axe vertical de la figure 2 est gradué en $10^{-10}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$: il faut écrire $9{,}1 \times 10^{-11}$ sous la forme $0{,}91 \times 10^{-10}$ avant de lire.

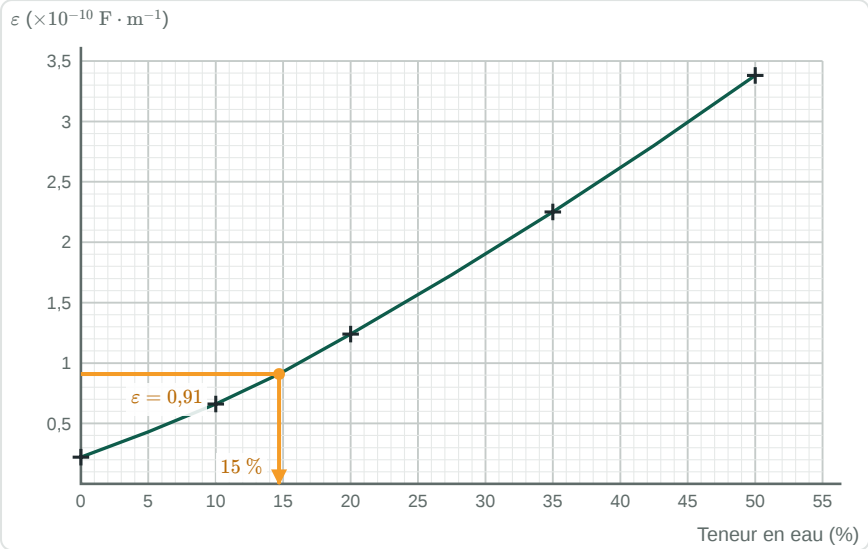
MÉTHODE
Question à prise d'initiative : annoncer la démarche (relier τ à ε, calculer $\varepsilon_{\min}$, lire la teneur sur la figure 2), puis la dérouler. Une démarche claire rapporte des points même inachevée.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{200 \times 10^{-6} \times 1.0 \times 10^{-2}}{2.2 \times 10^{5} \times 1.0 \times 10^{-1}}$

$\approx 9.090909 \times 10^{-11}$



Q6 · Figure 2 du sujet, avec la lecture de la teneur minimale

Q7 Indiquer l'objectif final de cet extrait de programme.

Le programme relève l'instant initial t_i, répète la mesure de la tension tant qu'elle n'a pas atteint un seuil, relève alors l'instant final t_f et calcule $t_f - t_i$.

L'extrait de programme sert à mesurer puis afficher le temps caractéristique τ du circuit RC.

COMPRENDRE
La mesure de τ n'est qu'une étape : avec τ, le microcontrôleur remonte à C, donc à ε, puis à la teneur en eau du sol.

Q8 Recopier la ligne 5 du programme et compléter la condition sur la valeur de la tension aux bornes du condensateur.

Données utiles $u_C(\tau) = 0{,}63 \times E$ (Q4)

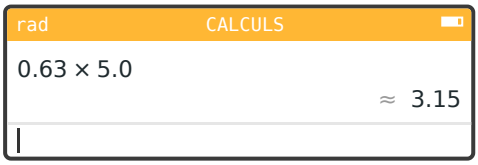
La boucle doit s'arrêter à l'instant τ, c'est-à-dire quand la tension atteint $0{,}63 \times E$ (Q4). Elle se répète donc tant que la tension est inférieure à cette valeur.

```
while tension < 0.63*E
```

PIÈGE
En Python, le séparateur décimal est le point : `0.63` et non `0,63`.

COMPRENDRE
Avec $E = 5{,}0$ V (ligne 2), le seuil vaut $3{,}15$ V.

À LA CALCULATRICE



Q9 Déterminer si la teneur en eau mesurée dans ce sol argileux est suffisante pour y assurer une croissance normale d'une plante.

Données utiles $\tau = 0{,}28676887987$ ms ; $S = 1{,}0 \times 10^{-1}$ m^2 ; $d = 1{,}0 \times 10^{-2}$ m ; $R = 2{,}2 \times 10^{5}\ \Omega$; teneur en eau requise : entre 24 % et 38 % ; figure 2

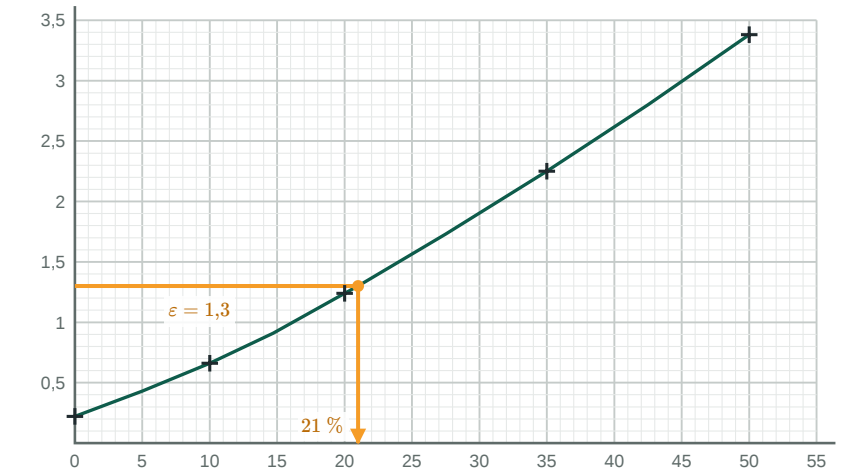
Comme en Q6, $\tau = \dfrac{R\,\varepsilon\,S}{d}$, donc $\varepsilon = \dfrac{\tau\,d}{R\,S}$, avec $\tau = 0{,}287 \times 10^{-3}$ s.

$$\varepsilon = \frac{0{,}287 \times 10^{-3} \times 1{,}0 \times 10^{-2}}{2{,}2 \times 10^{5} \times 1{,}0 \times 10^{-1}} = 1{,}3 \times 10^{-10}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Sur la figure 2, cette permittivité correspond à une teneur en eau d'environ 21 %.

Cette valeur est inférieure à 24 %, borne basse de l'intervalle permettant une croissance normale.

Teneur en eau d'environ $21\ \% < 24\ \%$: elle est **insuffisante**, il faut arroser.



Q9 · Figure 2 du sujet, avec la lecture de la teneur en eau mesurée

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0.287 \times 10^{-3} \times 1.0 \times 10^{-2}}{2.2 \times 10^{5} \times 1.0 \times 10^{-1}} \approx 1.304545 \times 10^{-10}$$

PIÈGE
Le programme affiche τ en millisecondes : convertir en secondes ($\times 10^{-3}$) avant le calcul. Inutile aussi de recopier les onze chiffres affichés, les données n'en portent que deux.

COMPRENDRE
Vérification rapide : $\tau = 287\ \mu$s dépasse les $200\ \mu$s de Q5, la mesure est donc exploitable, et la teneur trouvée dépasse logiquement les 15 % de Q6.