Modélisation d'un détecteur capacitif d'humidité

Bac 2023 Métropole Jour 2 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q1 Prévoir qualitativement le sens de variation de la capacité C du détecteur quand la teneur en eau d'un sol argileux augmente.

D'après la figure 2, la permittivité ε du sol argileux augmente avec sa teneur en eau.

Or $C = \dfrac{\varepsilon\, S}{d}$, avec S et d fixés : C est proportionnelle à ε.

Quand la teneur en eau augmente, la capacité C **augmente**.

MÉTHODE
« Prévoir qualitativement » : aucun calcul, mais un raisonnement en deux temps. D'abord ce que montre le graphique, puis la relation qui relie la grandeur lue à la grandeur demandée.

Q2 Montrer que u_C obéit à l'équation différentielle $E = \tau \times \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$ et exprimer le temps caractéristique τ en fonction de R et de C.

Interrupteur fermé, la loi des mailles donne : $E = u_R + u_C$.

Loi d'Ohm : $u_R = R\,i$.

Pour le condensateur : $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q = C\,u_C$, avec C constante, donc $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

En reportant : $E = R\,C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$.

C'est l'équation proposée, par identification :

$E = \tau\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$ avec $\tau = R\,C$

PIÈGE
Passer directement de la loi des mailles à l'équation finale. Les trois relations (mailles, Ohm, $i = C\,\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$) sont attendues une par une.

COMPRENDRE
Sur le schéma, les flèches u_R et u_C sont opposées au sens de i : convention récepteur, donc aucun signe « $-$ » dans la loi d'Ohm ni dans $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Q3 Vérifier que $u_C(t) = E \times \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est solution de l'équation différentielle et satisfait à la condition imposée à $t = 0$ s.

On dérive : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = E \times \dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

On calcule le second membre de l'équation :

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E - E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = E$$

L'égalité est vraie à chaque instant : la fonction est solution.

Condition initiale : $u_C(0) = E \times \left(1 - \mathrm{e}^{0}\right) = E \times (1 - 1) = 0$, ce qui correspond au condensateur déchargé à $t = 0$ s.

$u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ vérifie l'équation différentielle et $u_C(0) = 0$ V.

PIÈGE
Erreur de signe dans la dérivée : $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ se dérive en $-\dfrac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, et le signe « $-$ » placé devant l'exponentielle rend la dérivée de u_C positive.

MÉTHODE
« Vérifier » ne demande pas de résoudre l'équation : on dérive la fonction proposée, on remplace dans un membre et on retrouve l'autre. Puis on teste la condition initiale.

Q4 Montrer que la valeur de u_C à l'instant τ est approximativement $u_C(\tau) = 0{,}63 \times E$.

On remplace t par τ :

$u_C(\tau) = E \times \left(1 - \mathrm{e}^{-\tau/\tau}\right) = E \times \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$

Or $1 - \mathrm{e}^{-1} = 0{,}632$.

$u_C(\tau) = 0{,}632 \times E \approx 0{,}63 \times E$

COMPRENDRE
Ce résultat ne dépend ni de R ni de C : repérer l'instant où u_C atteint 63 % de E suffit pour mesurer τ.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$1 - e^{-1}$

≈ 0.6321206

Q5 Montrer que le temps caractéristique τ du circuit RC doit être au minimum de l'ordre de 200 µs.

Données utiles 52 000 valeurs de tension relevées par seconde ; au moins 10 valeurs avant d'atteindre τ

Durée entre deux mesures successives : $T_e = \dfrac{1}{52\,000} = 1{,}9 \times 10^{-5}$ s.

Il faut au moins 10 mesures avant l'instant τ, donc :

$$\tau \geqslant 10 \times T_e = \frac{10}{52\,000} = 1{,}9 \times 10^{-4}\ \text{s}$$

$\tau_{\min} = 1{,}9 \times 10^{-4}$ s $= 190$ µs, soit de l'ordre de 200 µs.

PIÈGE
Conversion : $1\ \mu\text{s} = 10^{-6}$ s. Écrire $1{,}9 \times 10^{-4}$ s $= 19$ µs fait manquer la valeur attendue d'un facteur dix.

COMPRENDRE
Chiffres significatifs : 52 000 en porte deux, le résultat aussi. « De l'ordre de » autorise l'arrondi de 190 µs à 200 µs.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{10}{52\,000}$

$\approx 1.923077 \times 10^{-4}$

Q6 À l'aide de la contrainte sur le temps caractéristique τ, déterminer la teneur minimale en eau d'un sol argileux mesurable avec ce dispositif.

Données utiles $S = 1{,}0 \times 10^{-1}\ \text{m}^2$; $d = 1{,}0 \times 10^{-2}$ m ; $R = 2{,}2 \times 10^{5}\ \Omega$; $\tau_{\min} = 200$ µs (Q5) ; figure 2

On relie τ à la permittivité : $\tau = RC$ (Q2) et $C = \dfrac{\varepsilon S}{d}$,

donc $\tau = \dfrac{R\varepsilon S}{d}$.

La contrainte $\tau \geqslant \tau_{\min}$ s'écrit : $\varepsilon \geqslant \dfrac{\tau_{\min} d}{RS}$.

$$\varepsilon_{\min} = \frac{200 \times 10^{-6} \times 1{,}0 \times 10^{-2}}{2{,}2 \times 10^{5} \times 1{,}0 \times 10^{-1}} = 9{,}1 \times 10^{-11}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

soit $\varepsilon_{\min} = 0{,}91 \times 10^{-10}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Sur la figure 2, l'ordonnée $0{,}91$ correspond à une teneur en eau d'environ 15 %. Comme ε augmente avec la teneur en eau, la contrainte impose une teneur supérieure à cette valeur.

Teneur en eau minimale mesurable : environ 15 %.

PIÈGE
L'axe vertical de la figure 2 est gradué en $10^{-10}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$: il faut écrire $9{,}1 \times 10^{-11}$ sous la forme $0{,}91 \times 10^{-10}$ avant de lire.

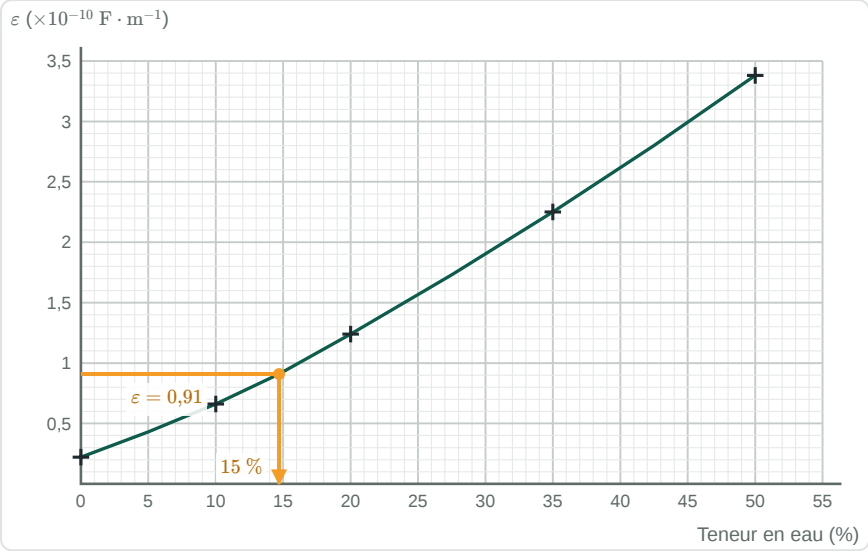
MÉTHODE
Question à prise d'initiative : annoncer la démarche (relier τ à ε, calculer $\varepsilon_{\min}$, lire la teneur sur la figure 2), puis la dérouler. Une démarche claire rapporte des points même inachevée.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{200 \times 10^{-6} \times 1.0 \times 10^{-2}}{2.2 \times 10^{5} \times 1.0 \times 10^{-1}}$

$\approx 9.090909 \times 10^{-11}$



Q6 · Figure 2 du sujet, avec la lecture de la teneur minimale

Q7 Indiquer l'objectif final de cet extrait de programme.

Le programme relève l'instant initial t_i, répète la mesure de la tension tant qu'elle n'a pas atteint un seuil, relève alors l'instant final t_f et calcule $t_f - t_i$.

L'extrait de programme sert à mesurer puis afficher le temps caractéristique τ du circuit RC.

COMPRENDRE
La mesure de τ n'est qu'une étape : avec τ, le microcontrôleur remonte à C, donc à ε, puis à la teneur en eau du sol.

Q8 Recopier la ligne 5 du programme et compléter la condition sur la valeur de la tension aux bornes du condensateur.

Données utiles $u_C(\tau) = 0{,}63 \times E$ (Q4)

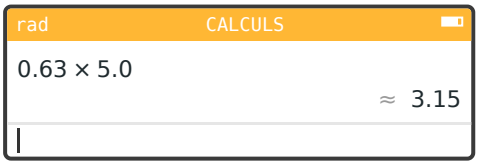
La boucle doit s'arrêter à l'instant τ, c'est-à-dire quand la tension atteint $0{,}63 \times E$ (Q4). Elle se répète donc tant que la tension est inférieure à cette valeur.

```
while tension < 0.63*E
```

PIÈGE
En Python, le séparateur décimal est le point : `0.63` et non `0,63`.

COMPRENDRE
Avec $E = 5{,}0$ V (ligne 2), le seuil vaut $3{,}15$ V.

À LA CALCULATRICE



Q9 Déterminer si la teneur en eau mesurée dans ce sol argileux est suffisante pour y assurer une croissance normale d'une plante.

Données utiles $\tau = 0{,}28676887987$ ms ; $S = 1{,}0 \times 10^{-1}$ m^2 ; $d = 1{,}0 \times 10^{-2}$ m ; $R = 2{,}2 \times 10^{5}\ \Omega$; teneur en eau requise : entre 24 % et 38 % ; figure 2

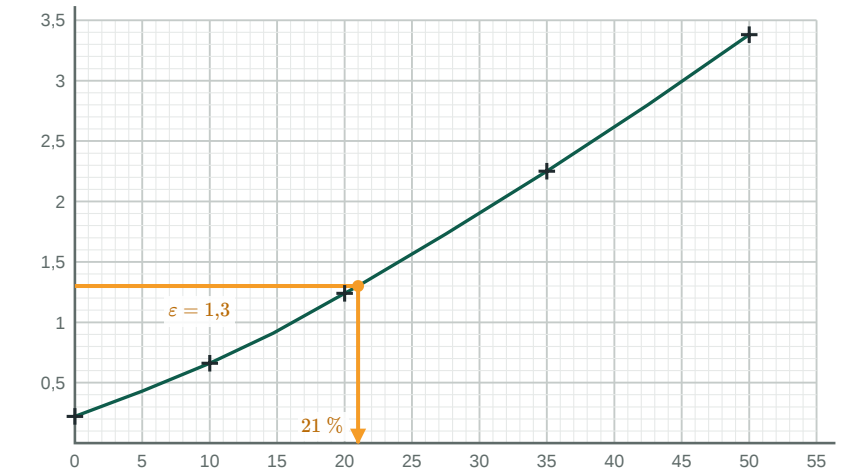
Comme en Q6, $\tau = \dfrac{R\,\varepsilon\,S}{d}$, donc $\varepsilon = \dfrac{\tau\,d}{R\,S}$, avec $\tau = 0{,}287 \times 10^{-3}$ s.

$$\varepsilon = \frac{0{,}287 \times 10^{-3} \times 1{,}0 \times 10^{-2}}{2{,}2 \times 10^{5} \times 1{,}0 \times 10^{-1}} = 1{,}3 \times 10^{-10}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$$

Sur la figure 2, cette permittivité correspond à une teneur en eau d'environ 21 %.

Cette valeur est inférieure à 24 %, borne basse de l'intervalle permettant une croissance normale.

Teneur en eau d'environ $21\ \% < 24\ \%$: elle est **insuffisante**, il faut arroser.



Q9 · Figure 2 du sujet, avec la lecture de la teneur en eau mesurée

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{0.287 \times 10^{-3} \times 1.0 \times 10^{-2}}{2.2 \times 10^{5} \times 1.0 \times 10^{-1}} \approx 1.304545 \times 10^{-10}$$

PIÈGE
Le programme affiche τ en millisecondes : convertir en secondes ($\times 10^{-3}$) avant le calcul. Inutile aussi de recopier les onze chiffres affichés, les données n'en portent que deux.

COMPRENDRE
Vérification rapide : $\tau = 287\ \mu$s dépasse les $200\ \mu$s de Q5, la mesure est donc exploitable, et la teneur trouvée dépasse logiquement les 15 % de Q6.