Protection des crapauds

Bac 2023 Métropole Jour 2 · Exercice 2 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Établir les expressions littérales des composantes a_x et a_z du vecteur accélération $\vec{a}_G$ du centre de masse du crapaud.

Système {crapaud}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ uniquement, les frottements de l'air étant négligés.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}_G$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}_G$, donc $\vec{a}_G = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, l'axe (Oz) est orienté vers le haut :

$a_x = 0$ et $a_z = -g$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » de a_z : l'axe (Oz) pointe vers le haut alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas. Donner le résultat sans système, référentiel ni bilan des forces coûte aussi des points.

COMPRENDRE
La masse se simplifie : dans le vide, tous les corps ont la même accélération $\vec{g}$, qu'il s'agisse d'un crapaud ou d'une balle.

Q2 Établir les expressions littérales des composantes $v_x(t)$ et $v_z(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}_G$ du centre de masse du crapaud.

Par définition $\vec{a}_G = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de $a_x = 0$ et de $a_z = -g$.

$$v_x(t) = C_1 \qquad v_z(t) = -g\,t + C_2$$

Conditions initiales : à $t = 0$, $\vec{v}_G = \vec{v}_0$ de composantes $v_0\cos(\alpha)$ selon (Ox) et $v_0\sin(\alpha)$ selon (Oz). Donc $C_1 = v_0\cos(\alpha)$ et $C_2 = v_0\sin(\alpha)$.

$v_x(t) = v_0\cos(\alpha)$ et $v_z(t) = -g\,t + v_0\sin(\alpha)$

PIÈGE
Oublier les constantes d'intégration, ou échanger sinus et cosinus. L'angle α est mesuré depuis l'horizontale : le côté adjacent, donc le cosinus, est sur (Ox).

MÉTHODE
Accélération, puis vitesse, puis position : à chaque étape, on prend une primitive et on fixe la constante avec la valeur à $t = 0$.

Q3 Montrer que les équations horaires s'écrivent $x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$.

Par définition $\vec{v}_G = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives de $v_x(t)$ et de $v_z(t)$.

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t + C_3 \qquad z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + C_4$$

Conditions initiales : à $t = 0$, G est en O, donc $x(0) = 0$ et $z(0) = 0$, ce qui donne $C_3 = 0$ et $C_4 = 0$.

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t$: ce sont les expressions attendues.

PIÈGE
Dans un « montrer que », écrire directement le résultat de l'énoncé ne rapporte rien : il faut faire apparaître les constantes C_3 et C_4 et justifier qu'elles sont nulles.

Q4 Établir l'expression de la durée du saut du crapaud, notée t_{saut}, en fonction de v_0, g et α.

Le saut se termine quand le crapaud retombe au sol : $z(t_{saut}) = 0$.

$$-\frac{1}{2}\,g\,t_{saut}^2 + v_0\sin(\alpha)\,t_{saut} = 0 \quad \text{soit} \quad t_{saut}\left(-\frac{1}{2}\,g\,t_{saut} + v_0\sin(\alpha)\right) = 0$$

La solution $t_{saut} = 0$ correspond au départ ; on garde l'autre :

$$\frac{1}{2}\,g\,t_{saut} = v_0\sin(\alpha).$$

$$\boxed{t_{saut} = \frac{2\,v_0\sin(\alpha)}{g}}$$

PIÈGE
Diviser par t_{saut} sans dire que l'on écarte la solution nulle. Mieux vaut factoriser et nommer les deux solutions : l'instant du départ et celui de la réception.

COMPRENDRE
La durée du saut ne dépend que de la composante verticale $v_0\sin(\alpha)$ de la vitesse initiale : c'est le double de la durée de la montée.

Q5 À l'aide de $x(t)$ et de t_{saut}, montrer que la vitesse permettant un saut de longueur d est $v_0 = \sqrt{\dfrac{g\,d}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}}$.

Données utiles $t_{saut} = \dfrac{2\,v_0\sin(\alpha)}{g}$ (Q4)

La longueur du saut est l'abscisse de G à la date t_{saut} : $d = x(t_{saut})$.

$$d = v_0\cos(\alpha) \times \frac{2\,v_0\sin(\alpha)}{g} = \frac{2\,v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$$

On isole v_0^2 : $\quad v_0^2 = \dfrac{g\,d}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$

Une norme est positive, on garde la racine positive :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{g\,d}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}}} \text{ : c'est la relation attendue.}$$

MÉTHODE
Portée d'un tir depuis le sol : 1) date de retour au sol avec $z(t) = 0$; 2) report de cette date dans $x(t)$. La même démarche sert pour un ballon, un projectile ou un jet d'eau.

Q6 Les crapauds les plus puissants sautent une longueur égale à 20 fois leur taille. Calculer la valeur de v_0 qu'ils atteignent pour $\alpha = 45^\circ$.

Données utiles taille moyenne : 10 cm ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; relation de Q5

Longueur du saut : $d = 20 \times 10\ \text{cm} = 2{,}0 \times 10^2\ \text{cm} = 2{,}0\ \text{m}$.

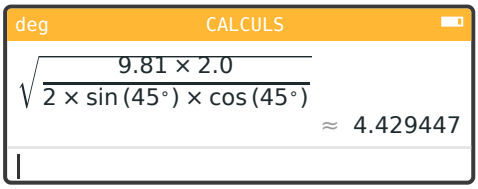
$$v_0 = \sqrt{\frac{g\,d}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \times 2{,}0}{2 \times \sin(45^\circ) \times \cos(45^\circ)}}$$

$$\boxed{v_0 = 4{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

PIÈGE
Laisser d en centimètres alors que g est en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, ou calculer avec la calculatrice réglée en radians : vérifier que $\sin(45^\circ)$ affiche bien 0,707.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la taille du crapaud (10 cm), donnée la moins précise. Pour la suite, on garde la valeur non arrondie en mémoire.

À LA CALCULATRICE



Q7 Pour un saut vertical ($\alpha = 90^\circ$), établir que la hauteur maximale a pour expression $z_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2\,g}$.

Pour $\alpha = 90^\circ$, $\sin(\alpha) = 1$: $\quad v_z(t) = -g\,t + v_0$ et $z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t$.

Au sommet, à la date $t_{\max}$, la vitesse verticale s'annule : $-g\,t_{\max} + v_0 = 0$, donc $t_{\max} = \dfrac{v_0}{g}$.

$$z_{\max} = z(t_{\max}) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \times \frac{v_0}{g} = -\frac{v_0^2}{2\,g} + \frac{v_0^2}{g}$$

$z_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2\,g}$: c'est l'expression attendue.

PIÈGE
Chercher le sommet avec $z(t) = 0$: cette condition donne le retour au sol. Le sommet correspond à $v_z = 0$.

MÉTHODE
Autre voie, plus courte : le poids est la seule force, l'énergie mécanique se conserve. Entre le départ et le sommet, $\dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 = m\,g\,z_{\max}$, d'où le résultat.

Q8 En déduire la valeur de la hauteur de barrière minimale H_{champion} qui arrête les crapauds les plus puissants, sautant verticalement avec la vitesse v_0 de la question Q6.

Données utiles $v_0 = 4{,}43\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur non arrondie (Q6) ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

La barrière doit être au moins aussi haute que le saut vertical le plus haut : $H_{\text{champion}} = z_{\max}$.

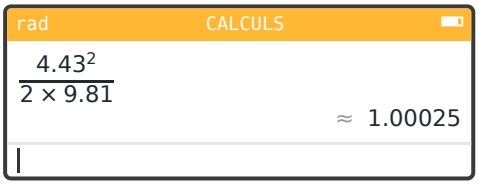
$$H_{\text{champion}} = \frac{v_0^2}{2\,g} = \frac{4{,}43^2}{2 \times 9{,}81}$$

$H_{\text{champion}} = 1{,}0\ \text{m}$

PIÈGE
Avec la valeur arrondie $4{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, on trouve 0,99 m : l'écart vient de l'arrondi. Réutiliser le résultat mémorisé de la calculatrice.

COMPRENDRE
Comme $2\sin(45^\circ)\cos(45^\circ) = 1$, on a $v_0^2 = g\,d$ et donc $H_{\text{champion}} = \dfrac{d}{2}$: la hauteur du saut vertical vaut la moitié de la longueur du meilleur saut à 45°.

À LA CALCULATRICE



Q9 Les barrières mesurent en réalité 50 à 60 cm. Donner un argument expliquant pourquoi on installe des barrières d'une hauteur inférieure à H_{champion}.

Données utiles $H_{\text{champion}} = 1{,}0$ m (Q8)

La hauteur de 1,0 m correspond à un cas extrême : un crapaud parmi les plus puissants, qui sauterait exactement à la verticale.

Or un crapaud qui se déplace saute vers l'avant, en oblique : pour une même vitesse initiale, la hauteur atteinte est alors plus faible. Pour $\alpha = 45^\circ$ par exemple, la composante verticale de la vitesse est $v_0 \sin(45^\circ)$ et la hauteur atteinte vaut $\dfrac{(v_0 \sin(45^\circ))^2}{2\,g} = 0{,}50$ m.

De plus, la plupart des crapauds sautent moins loin que 20 fois leur taille.

Une barrière de 50 à 60 cm suffit à arrêter la quasi-totalité des crapauds, pour un coût et un encombrement moindres.

COMPRENDRE

Un seul argument pertinent suffit pour avoir les points. Le calcul à 45° n'est pas exigé : il montre simplement que la hauteur réelle des barrières est cohérente avec le modèle.

À LA CALCULATRICE

