A la découverte de Saturne

Bac 2023 Métropole Jour 1 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 56**

Q1 Préciser le sens du terme « afocal ».

Un système optique afocal ne possède pas de foyers : d'un objet situé à l'infini, il forme une image elle aussi à l'infini. Un faisceau de rayons parallèles entre eux à l'entrée ressort en faisceau de rayons parallèles entre eux.

Afocal : objet à l'infini et image finale à l'infini.

COMPRENDRE
L'image étant à l'infini, l'œil l'observe sans accommoder, donc sans fatigue. C'est le réglage habituel d'une lunette astronomique.

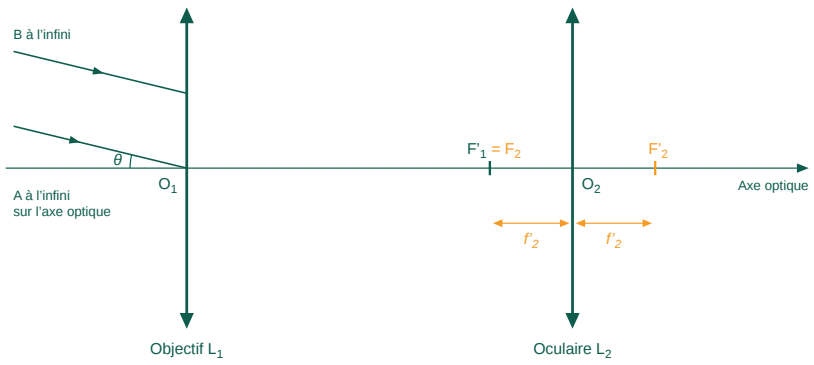
Q2 Placer sur la figure A1 les foyers objet F_2 et image F_2' de la lentille L_2 dans le cas d'une lunette afocale.

Lunette afocale : le foyer objet F_2 de l'oculaire est confondu avec le foyer image F_1' de l'objectif.

Le foyer image F_2' est le symétrique de F_2 par rapport au centre optique O_2 : $O_2F_2' = F_2O_2 = f_2'$.

F_2 confondu avec F_1' ; F_2' symétrique de F_2 par rapport à O_2 (voir figure).

PIÈGE
Prendre le symétrique par rapport à O_1 ou placer F_2' avant l'oculaire. Pour une lentille convergente, le foyer image est du côté où sort la lumière.



Q2 · Figure A1 : foyers de l'oculaire placés (en orange)

Q3 Construire sur la figure A1 la marche des deux rayons issus de B qui émergent de la lunette, en faisant apparaître l'image intermédiaire A_1B_1.

B est à l'infini : son image B_1 par l'objectif se trouve dans le plan focal image de L_1, à la verticale de F_1'. Le point A_1 est en F_1'.

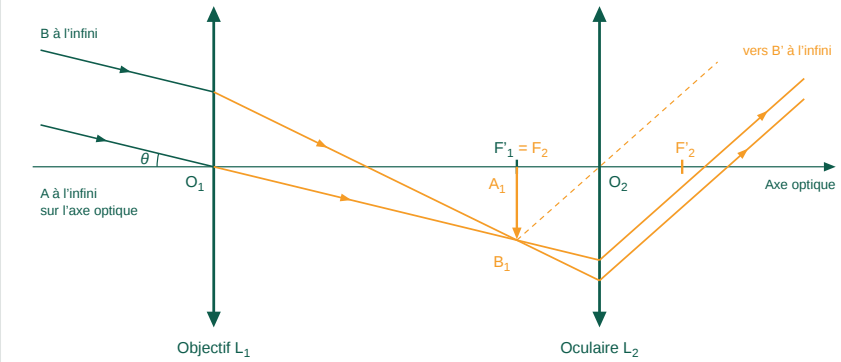
Le rayon passant par O_1 n'est pas dévié : il coupe ce plan en B_1. Le second rayon, parallèle au premier, sort de L_1 en passant aussi par B_1 .

B_1 est dans le plan focal objet de L_2 : les deux rayons émergent de l'oculaire parallèles entre eux, parallèles à la droite (B_1O_2) tracée en pointillés.

Image intermédiaire A_1B_1 dans le plan focal commun, renversée ; rayons émergents parallèles à (B_1O_2) (voir figure).

PIÈGE
Arrêter les rayons en B_1 : ils se croisent en ce point puis continuent en ligne droite jusqu'à l'oculaire. Tracer les rayons à la règle, avec des flèches.

MÉTHODE
Pour trouver la direction de sortie, tracer le rayon fictif qui part de B_1 et passe par O_2 sans être dévié. Tous les rayons issus de B_1 ressortent parallèles à lui.



Q3 · Figure A1 : marche des deux rayons et image intermédiaire

Q4 Vérifier, à partir des données, que la lunette de Huygens peut être considérée comme afocale.

Données utiles $f'_1 = 329$ cm ; $f'_2 = 7{,}0$ cm ; tube $L = 372$ cm ; objectif enfoncé de $\ell = 36$ cm

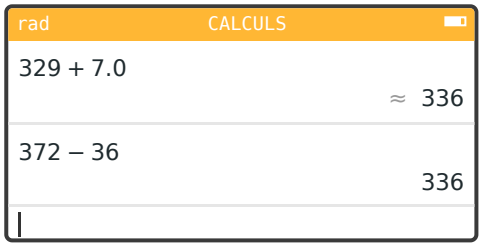
La lunette est afocale si F'_1 et F_2 sont confondus, donc si la distance entre les deux lentilles vaut $O_1O_2 = f'_1 + f'_2$.

Somme des distances focales : $f'_1 + f'_2 = 329 + 7{,}0 = 336$ cm.

Distance réelle entre les lentilles (figure 4) : $O_1O_2 = L - \ell = 372 - 36 = 336$ cm.

$O_1O_2 = f'_1 + f'_2 = 336$ cm : la lunette de Huygens est bien afocale.

À LA CALCULATRICE

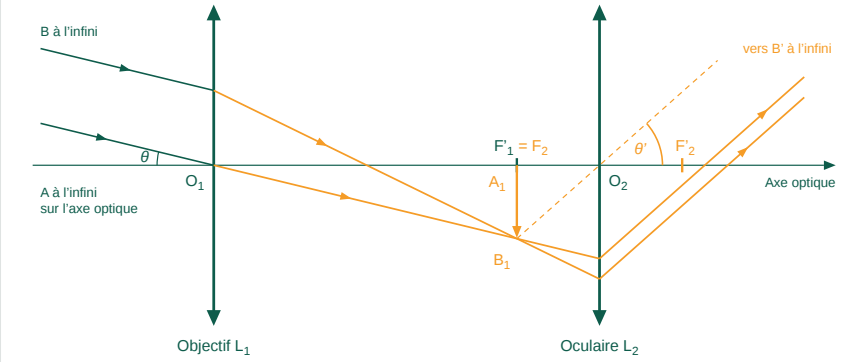


Q5 Placer l'angle θ' sur la figure A1.

θ' est l'angle entre l'axe optique et la direction des rayons qui émergent de l'oculaire. On le marque en O_2, entre l'axe optique et la droite (B_1O_2), ou entre l'axe et l'un des rayons émergents.

θ' : angle entre l'axe optique et les rayons émergents (voir figure).

COMPRENDRE
Sur le schéma, θ' est nettement plus grand que θ : c'est ce qui traduit le grossissement. On retrouve aussi θ' dans le triangle $O_2A_1B_1$, utile pour la question Q7.



Q5 · Figure A1 complétée : angle θ' en sortie de la lunette

Q6 Donner l'expression du grossissement G_{Huy} de la lunette de Huygens en fonction des angles θ et θ'.

Le grossissement compare l'angle sous lequel l'objet est vu à travers l'instrument à l'angle sous lequel il est vu à l'œil nu.

$$G_{Huy} = \frac{\theta'}{\theta}$$

PIÈGE
Inverser le rapport. Un grossissement de lunette est supérieur à 1 : l'angle de sortie θ' est au numérateur. C'est un nombre sans unité.

Q7 Montrer que le grossissement s'exprime en fonction des distances focales : $G_{Huy} = \dfrac{f'_1}{f'_2}$.

Dans le triangle $O_1A_1B_1$, rectangle en A_1, avec $O_1A_1 = f'_1$: $\tan\theta = \dfrac{A_1B_1}{f'_1}$.

Dans le triangle $O_2A_1B_1$, rectangle en A_1, avec $O_2A_1 = f'_2$: $\tan\theta' = \dfrac{A_1B_1}{f'_2}$.

Les angles sont petits, donc $\tan\theta = \theta$ et $\tan\theta' = \theta'$ (en radians) :

$$G_{Huy} = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{A_1B_1}{f'_2} \times \frac{f'_1}{A_1B_1}$$

$$\boxed{G_{Huy} = \frac{f'_1}{f'_2}}$$

PIÈGE
Oublier de citer l'approximation des petits angles : sans elle, on n'obtient qu'un rapport de tangentes et la démonstration est incomplète.

MÉTHODE
Chercher le segment commun aux deux triangles : ici A_1B_1, vu depuis O_1 sous l'angle θ et depuis O_2 sous l'angle θ'. Il se simplifie dans le rapport.

Q8 Calculer la valeur du grossissement G_{Huy} de la lunette utilisée par Huygens.

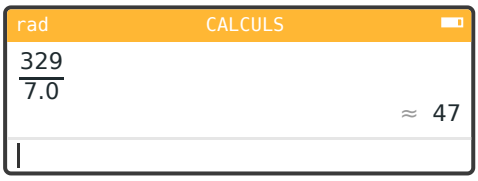
Données utiles $f'_1 = 329$ cm ; $f'_2 = 7{,}0$ cm

$$G_{Huy} = \frac{f'_1}{f'_2} = \frac{329}{7{,}0}$$

$$\boxed{G_{Huy} = 47}$$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme $f'_2 = 7{,}0$ cm, la donnée la moins précise. Les deux distances sont dans la même unité : inutile de convertir en mètres.

À LA CALCULATRICE



Q9 Conclure sur la possibilité pour Huygens de distinguer la surface de Saturne de son premier anneau en utilisant la lunette.

Données utiles $D_{A\text{-}B} = 3{,}17 \times 10^4$ km ; $D_{T\text{-}S} = 1{,}42 \times 10^9$ km ; $G_{Huy} = 47$ (Q8) ; seuil de l'œil : $3{,}0 \times 10^{-4}$ rad

Angle à l'œil nu (figure 5), avec l'approximation des petits angles :

$$\theta = \frac{D_{A\text{-}B}}{D_{T\text{-}S}} = \frac{3{,}17 \times 10^4}{1{,}42 \times 10^9} = 2{,}23 \times 10^{-5}\ \text{rad}$$

Angle à travers la lunette : $\theta' = G_{Huy} \times \theta = 47 \times 2{,}23 \times 10^{-5} = 1{,}0 \times 10^{-3}$ rad.

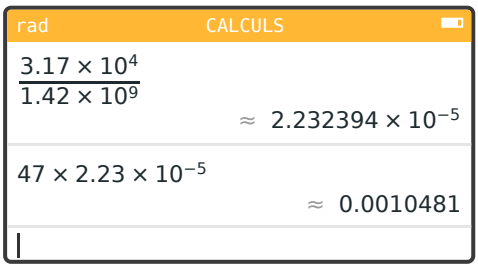
Or $1{,}0 \times 10^{-3}$ rad $> 3{,}0 \times 10^{-4}$ rad.

$\theta' = 1{,}0 \times 10^{-3}$ rad, supérieur au seuil : Huygens peut distinguer la surface de Saturne de son premier anneau.

PIÈGE
Comparer θ au seuil au lieu de θ'. Les deux distances restent en kilomètres : seul leur rapport compte, et il donne un angle en radians.

COMPRENDRE
À l'œil nu, $\theta = 2{,}23 \times 10^{-5}$ rad est treize fois plus petit que le seuil : sans instrument, Saturne et ses anneaux se confondent en un seul point.

À LA CALCULATRICE



Q10 Expliquer, par une approche quantitative, pourquoi la diffraction a empêché Galilée d'observer les anneaux de Saturne avec sa lunette, contrairement à Huygens.

Données utiles $\lambda = 550$ nm ; $a_{Gal} = 29{,}0$ mm ; $a_{Huy} = 51{,}0$ mm ; $\theta = 2{,}23 \times 10^{-5}$ rad (Q9)

Deux points A et B sont séparés par la lunette si $\theta \geq \theta_{\text{diff}}$, avec $\theta_{\text{diff}} = 1{,}22 \times \dfrac{\lambda}{a}$ et $\theta = 2{,}23 \times 10^{-5}$ rad.

Lunette de Galilée : $\theta_{\text{diff}} = 1{,}22 \times \dfrac{550 \times 10^{-9}}{29{,}0 \times 10^{-3}} = 2{,}31 \times 10^{-5}$ rad.

$\theta < \theta_{\text{diff}}$: les taches d'Airy de A et de B se superposent, Galilée ne peut pas séparer la planète de son anneau.

Lunette de Huygens : $\theta_{\text{diff}} = 1{,}22 \times \dfrac{550 \times 10^{-9}}{51{,}0 \times 10^{-3}} = 1{,}32 \times 10^{-5}$ rad.

$\theta > \theta_{\text{diff}}$: les deux taches sont séparées, Huygens distingue l'anneau.

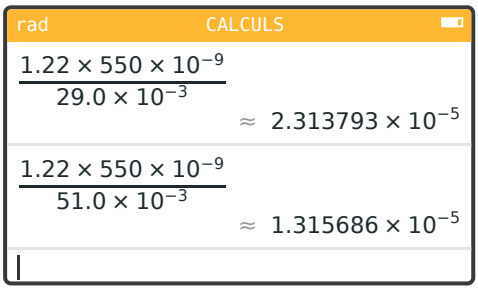
Galilée : $\theta_{\text{diff}} = 2{,}31 \times 10^{-5}$ rad $> \theta$; Huygens : $\theta_{\text{diff}} = 1{,}32 \times 10^{-5}$ rad $< \theta$. Seul l'objectif de Huygens, plus large, sépare Saturne de son anneau.

PIÈGE
Comparer θ_{diff} à θ' : la diffraction a lieu à l'entrée de l'objectif, donc la comparaison se fait avec θ. Convertir λ et a en mètres.

COMPRENDRE
Avec $G_{Gal} = 14$, Galilée obtenait $14 \times 2{,}23 \times 10^{-5} = 3{,}1 \times 10^{-4}$ rad, juste au-dessus du seuil de l'œil. Son grossissement suffisait presque : c'est bien le diamètre de l'objectif qui le limitait.

MÉTHODE
Question ouverte : écrire le critère, calculer la grandeur pour chaque lunette, comparer, conclure par une phrase. Chaque étape rédigée rapporte des points, même si le calcul n'aboutit pas.

À LA CALCULATRICE



Q11 Justifier le choix de Huygens de diviser la trajectoire de Titan en 16 parties.

Huygens retrouve Titan à la même position le 25 mars et le 10 avril, le 3 et le 19 avril, le 13 et le 29 avril. Chacun de ces intervalles dure 16 jours (mars compte 31 jours : $6 + 10 = 16$).

Titan fait donc un tour de Saturne en 16 jours environ. En divisant l'orbite en 16 parties égales, le satellite avance d'une division par jour, puisque son mouvement est régulier.

Période de révolution d'environ 16 jours : une division de l'orbite correspond à un jour.

COMPRENDRE
Le texte le confirme : numéro 12 le 25 mars, 13 le 26, 14 le 27. Neuf jours après le 25 mars, le 3 avril, Titan est en $12 + 9 - 16 = 5$.

Q12 Donner l'expression vectorielle de la force d'interaction gravitationnelle exercée par Saturne sur Titan en fonction de G, M_S, M_T, R et de l'un des vecteurs unitaires.

La force est attractive, dirigée de Titan vers le centre S de Saturne, donc selon $\vec{u}_n$.

$$\vec{F}_{S/T} = G\,\frac{M_S\,M_T}{R^2}\,\vec{u}_n$$

PIÈGE
Mettre un signe « $-$ » : sur la figure 7, $\vec{u}_n$ pointe déjà vers S. Ne pas oublier la flèche sur $\vec{F}_{S/T}$ ni le vecteur unitaire.

Q13 Le mouvement de Titan autour de S est supposé circulaire. Montrer qu'il est uniforme, puis que $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_S}{R}}$.

Système {Titan}, de masse M_T constante ; référentiel saturnocentrique supposé galiléen ; seule force : $\overrightarrow{F}_{S/T}$.

Deuxième loi de Newton : $\overrightarrow{F}_{S/T} = M_T\,\vec{a}$, soit $G\,\dfrac{M_S\,M_T}{R^2}\,\vec{u}_n = M_T\,\vec{a}$, donc

$$\vec{a} = \frac{G\,M_S}{R^2}\,\vec{u}_n + 0\,\vec{u}_t$$

Or, dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon R : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\,\vec{u}_n + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t$.

Par identification selon $\vec{u}_t$: $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, donc v est constante : le mouvement est **uniforme**.

Par identification selon $\vec{u}_n$: $\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{G\,M_S}{R^2}$, soit $v^2 = \dfrac{G\,M_S}{R}$.

Mouvement uniforme et $v = \sqrt{\dfrac{G\,M_S}{R}}$

PIÈGE

Dire « l'accélération est constante donc le mouvement est uniforme » : le vecteur $\vec{a}$ change de direction à chaque instant. Seul $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ prouve l'uniformité.

MÉTHODE

Toujours le même enchaînement : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, accélération dans le repère de Frenet, identification. La composante tangentielle donne l'uniformité, la composante normale donne la vitesse.

Q14 En déduire l'expression de la période de révolution T_{Kep} de Titan. Calculer sa valeur. Commenter.

Données utiles $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2} ; $M_S = 5{,}68 \times 10^{26}$ kg ; $R = 1{,}22 \times 10^6$ km ; T_{Huy} = 15 jours 23 heures 13 minutes

Le mouvement est uniforme : Titan parcourt la circonférence $2\pi R$ pendant une période, donc $v = \dfrac{2\pi R}{T_{Kep}}$.

$$T_{Kep} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{G\,M_S}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\,M_S}}$$

Avec $R = 1{,}22 \times 10^9$ m :

$$T_{Kep} = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}22\times10^9)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}68\times10^{26}}} = 1{,}38\times10^6 \text{ s}$$

soit environ 15,9 jours.

Valeur de Huygens : $T_{Huy} = 15\times24\times3600 + 23\times3600 + 13\times60 = 1\,379\,580$ s $= 1{,}38\times10^6$ s.

Les deux valeurs coïncident avec trois chiffres significatifs (écart relatif d'environ 0,3 %) : la mesure de Huygens, faite en 1655, est remarquablement précise et en accord avec le modèle du mouvement circulaire uniforme.

$T_{Kep} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{G\,M_S}} = 1{,}38\times10^6$ s, en accord avec $T_{Huy} = 1{,}38\times10^6$ s.

PIÈGE

Laisser R en kilomètres : G est en unités SI, il faut $R = 1{,}22\times10^9$ m. L'erreur est élevée au cube, le résultat devient absurde.

COMPRENDRE

La masse de Titan n'intervient pas : M_T s'est simplifiée dans la deuxième loi de Newton. En élevant au carré, on retrouve la troisième loi de Kepler, $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_S}$.

À LA CALCULATRICE

