Détermination de la valeur du champ de pesanteur à la surface de la Lune

Bac 2024 Centres étrangers 1 Bis · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q1 À partir d'une loi dont on donnera le nom, exprimer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}$ dans le repère (Ox ; Oy).

Système {balle}, de masse m constante ; référentiel lunaire supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}_L$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g}_L = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}_L$.

Le vecteur $\vec{g}_L$ est vertical et dirigé vers le bas, alors que l'axe (Oy) est orienté vers le haut :

$a_x = 0$ et $a_y = -g_L$

PIÈGE
Oublier le signe « $-$ » sur a_y : g_L désigne une norme, positive, et $\vec{g}_L$ est de sens opposé à $\vec{j}$.

COMPRENDRE
La masse se simplifie : l'accélération, donc tout le mouvement, ne dépend pas de m. La valeur $m = 46{,}0$ g ne sert dans aucun calcul.

Q2 En déduire les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de la balle.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de a_x et a_y : $v_x = C_1$ et $v_y = -g_L\,t + C_2$.

À $t = 0$: $v_x(0) = V_0\cos(\theta)$ et $v_y(0) = V_0\sin(\theta)$, d'où

$$v_x(t) = V_0\cos(\theta) \qquad v_y(t) = -g_L\,t + V_0\sin(\theta)$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, on cherche de nouveau les primitives : $x = V_0\cos(\theta)\,t + C_3$ et $y = -\dfrac{1}{2}\,g_L\,t^2 + V_0\sin(\theta)\,t + C_4$.

À $t = 0$, la balle est en O : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donc $C_3 = C_4 = 0$.

$x(t) = V_0\cos(\theta)\,t$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g_L\,t^2 + V_0\sin(\theta)\,t$

PIÈGE
Intervertir cosinus et sinus. L'angle θ est mesuré depuis l'horizontale : le cosinus va avec l'axe (Ox), le sinus avec l'axe (Oy).

MÉTHODE
Deux recherches de primitives successives, de $\vec{a}$ à $\vec{v}$ puis de $\vec{v}$ à la position. Chaque constante se fixe aussitôt avec la condition initiale correspondante, écrite explicitement.

Q3 À partir des équations horaires, montrer que la durée du vol s'écrit $t_{\text{vol}} = \dfrac{2\,V_0\sin(\theta)}{g_L}$.

La balle retombe au sol à la date t_{vol} : son ordonnée est de nouveau nulle, $y(t_{\text{vol}}) = 0$.

$$-\frac{1}{2}\,g_L\,t_{\text{vol}}^2 + V_0\sin(\theta)\,t_{\text{vol}} = 0 \quad \text{soit} \quad t_{\text{vol}}\left(-\frac{1}{2}\,g_L\,t_{\text{vol}} + V_0\sin(\theta)\right) = 0$$

Ce produit est nul si $t_{\text{vol}} = 0$ (instant du tir, solution écartée) ou si $-\dfrac{1}{2}\,g_L\,t_{\text{vol}} + V_0\sin(\theta) = 0$.

$t_{\text{vol}} = \dfrac{2\,V_0\sin(\theta)}{g_L}$, expression attendue.

COMPRENDRE
L'équation $y(t) = 0$ a deux solutions car la balle est au sol deux fois : au départ et à l'impact. Il faut dire pourquoi on écarte $t = 0$.

Q4 Déterminer une autre expression de t_{vol} en fonction de la portée x_P, de la vitesse initiale V_0 et de l'angle de tir θ.

À la date t_{vol}, la balle touche le sol au point d'abscisse x_P : $x(t_{\text{vol}}) = x_P$, soit $V_0\cos(\theta)\,t_{\text{vol}} = x_P$.

$t_{\text{vol}} = \dfrac{x_P}{V_0\cos(\theta)}$

COMPRENDRE
Selon (Ox), le mouvement est uniforme à la vitesse $V_0\cos(\theta)$: la durée est simplement la distance horizontale divisée par cette vitesse.

Q5 En déduire que le champ de pesanteur lunaire s'écrit $g_L = \dfrac{2\,V_0^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{x_P}$.

Les expressions de Q3 et de Q4 désignent la même durée :

$$\frac{2\,V_0\sin(\theta)}{g_L} = \frac{x_P}{V_0\cos(\theta)}$$

Produit en croix : $g_L\,x_P = 2\,V_0\sin(\theta)\times V_0\cos(\theta)$.

$\boxed{g_L = \dfrac{2\,V_0^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{x_P}}$, expression attendue.

Q6 Calculer la valeur numérique de g_L en précisant son unité.

Données utiles $V_0 = 30\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; $\theta = 25^\circ$; $x_P = 36\ \text{m}$

Conversion : $V_0 = \dfrac{30}{3{,}6} = 8{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

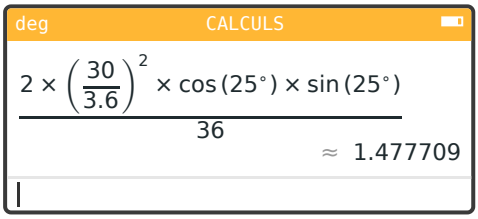
$$g_L = \frac{2\times\left(\dfrac{30}{3{,}6}\right)^2\times\cos(25^\circ)\times\sin(25^\circ)}{36}$$

$\boxed{g_L = 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$

PIÈGE
Laisser V_0 en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ donne 19 au lieu de 1,5. Vérifier aussi que la calculatrice est en mode degrés.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme V_0, θ et x_P. Unité : $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2$ divisé par des mètres donne des $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, soit une accélération (ou des $\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$).

À LA CALCULATRICE



Q7 Calculer la valeur numérique de g_{L0} à partir de la loi de la gravitation universelle.

Données utiles $M_L = 7{,}34\times10^{22}\ \text{kg}$; $R_L = 1740\ \text{km}$; $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$

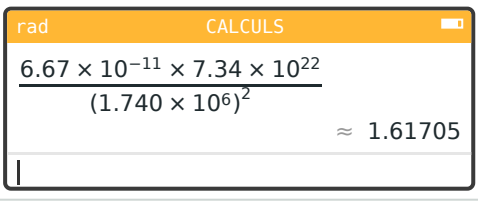
$g_{L0} = \dfrac{G\,M_L}{R_L^2}$ avec $R_L = 1740\ \text{km} = 1{,}740\times10^6\ \text{m}$.

$$g_{L0} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times7{,}34\times10^{22}}{(1{,}740\times10^6)^2}$$

$\boxed{g_{L0} = 1{,}62\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$

PIÈGE
Laisser R_L en kilomètres (résultat un million de fois trop grand) ou oublier le carré au dénominateur.

À LA CALCULATRICE



Q8 Comparer la valeur g_{L0} obtenue par la loi de la gravitation universelle à celle obtenue à partir du tir de golf d'Alan Shepard.

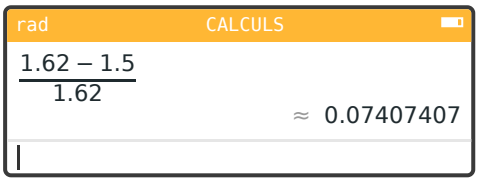
Données utiles $g_L = 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (Q6) ; $g_{L0} = 1{,}62\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ (Q7)

Écart relatif : $\dfrac{|g_{L0} - g_L|}{g_{L0}} = \dfrac{1{,}62 - 1{,}5}{1{,}62} = 0{,}07$, soit environ 7 %.

Les deux valeurs sont proches. Le tir de golf donne une valeur un peu plus faible, ce qui reste acceptable : V_0, θ et x_P ne sont que des estimations, connues avec deux chiffres significatifs.

$g_L \approx g_{L0}$ à environ 7 % près : le tir de golf fournit une estimation correcte du champ de pesanteur lunaire.

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE

Une vitesse initiale estimée à 5 % près change déjà g_L de 10 %, puisque V_0 intervient au carré : l'écart observé est compatible avec la précision des données.

MÉTHODE

« Comparer » demande un critère chiffré. Sans incertitude fournie, on calcule l'écart relatif à la valeur de référence, puis on conclut par une phrase.