à la découverte des lunes glacées de Jupiter

Bac 2024 Centres étrangers 1 Jour 2 · Exercice 2 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

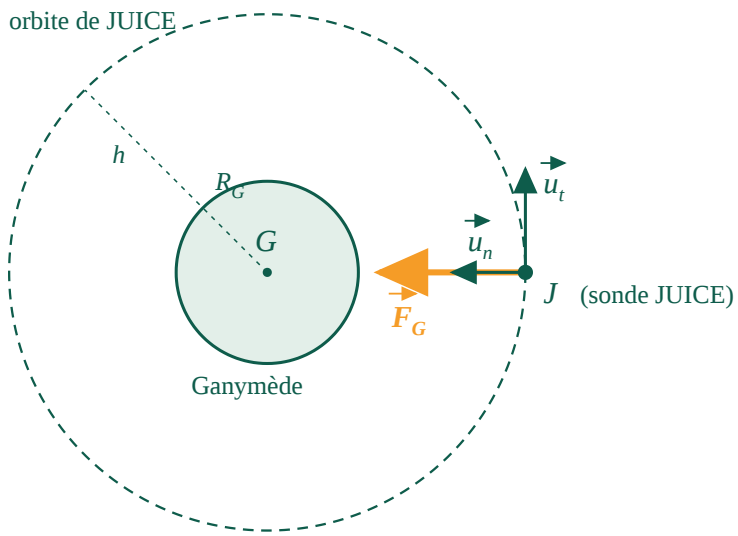
Q.1 Schématiser, sans souci d'échelle, Ganymède et l'orbite de la sonde JUICE. Placer le repère de Frenet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ et représenter la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_G}$ exercée par Ganymède sur la sonde.

Ganymède est au centre G de l'orbite circulaire, de rayon $R_G + h$. En un point J de la trajectoire :

- $\vec{u}_t$ est tangent au cercle, dans le sens du mouvement ;
- $\vec{u}_n$ est porté par le rayon et dirigé vers le centre G ;
- $\overrightarrow{F_G}$ a pour origine J, pour direction la droite (JG) et pour sens de J vers G.

Schéma ci-dessous : $\overrightarrow{F_G}$ est colinéaire à $\vec{u}_n$ et de même sens.

PIÈGE
Dessiner $\vec{u}_n$ vers l'extérieur du cercle, ou faire partir la force du centre de Ganymède : son point d'application est la sonde.



Q.1 · Ganymède, l'orbite de JUICE, le repère de Frenet et la force

Q.2 Exprimer, dans le repère de Frenet, le vecteur de la force $\overrightarrow{F_G}$.

En notant m la masse de la sonde, la distance entre les centres étant $R_G + h$:

$$\overrightarrow{F_G} = \frac{G\,m\,M_G}{(R_G+h)^2}\,\vec{u}_n$$

PIÈGE
Écrire h^2 ou R_G^2 au dénominateur : la distance qui compte va du centre de Ganymède à la sonde. Pas de signe « $-$ » : la force attractive est dans le sens de $\vec{u}_n$.

Q.3 $\overrightarrow{F_G}$ étant la seule force exercée sur la sonde, montrer que son mouvement circulaire est uniforme dans le référentiel, supposé galiléen, centré sur Ganymède.

Système {sonde JUICE}, de masse m constante ; référentiel centré sur Ganymède, supposé galiléen ; seule force : $\overrightarrow{F_G}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $\dfrac{G\,m\,M_G}{(R_G+h)^2}\,\vec{u}_n = m\,\vec{a}$, donc

$$\vec{a} = \frac{G\,M_G}{(R_G+h)^2}\,\vec{u}_n + 0\,\vec{u}_t$$

Pour un mouvement circulaire de rayon R_G+h, dans le repère de Frenet : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R_G+h}\,\vec{u}_n + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t$.

Par identification selon $\vec{u}_t$:

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la valeur v de la vitesse est constante, le mouvement circulaire est **uniforme**.

PIÈGE
Affirmer que l'accélération est nulle parce que la vitesse est constante. Seule la valeur de la vitesse est constante : sa direction change, donc $\vec{a} \neq \vec{0}$.

MÉTHODE
Orbite circulaire et force centrale : 1) deuxième loi de Newton ; 2) accélération dans le repère de Frenet ; 3) identification. Selon $\vec{u}_t$ on obtient l'uniformité, selon $\vec{u}_n$ la vitesse (Q.4).

Q.4 Montrer que la vitesse de la sonde JUICE peut s'écrire $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_G}{R_G+h}}$.

L'identification des deux expressions de $\vec{a}$ (Q.3) selon $\vec{u}_n$ donne :

$$\frac{v^2}{R_G+h} = \frac{G\,M_G}{(R_G+h)^2} \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{G\,M_G}{R_G+h}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \times M_G}{R_G+h}}$$

COMPRENDRE
La masse de la sonde a disparu : sur une orbite donnée, tout objet a la même vitesse. Plus l'altitude est grande, plus la vitesse est faible.

Q.5 Établir l'expression de la période T en fonction de R_G, h, M_G et G, puis en déduire que, sur l'orbite d'altitude 500 km, la période est proche de $T_{500} = 2{,}77$ h.

Données utiles $R_G = 2{,}63 \times 10^3$ km ; $M_G = 1{,}82 \times 10^{23}$ kg ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2} ; $h = 500$ km

En une période T, la sonde parcourt à vitesse constante le périmètre $2\pi(R_G+h)$ de son orbite :

$$T = \frac{2\pi(R_G+h)}{v} = 2\pi(R_G+h)\sqrt{\frac{R_G+h}{G\,M_G}} \quad \text{soit} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_G+h)^3}{G\,M_G}}$$

Avec $R_G + h = 2{,}63 \times 10^6 + 500 \times 10^3 = 3{,}13 \times 10^6$ m :

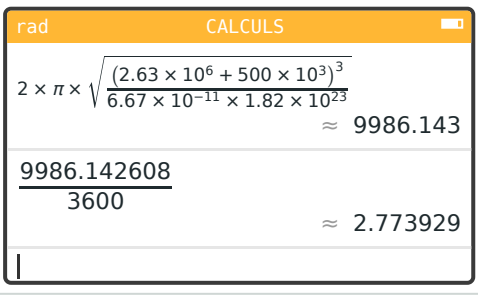
$$T_{500} = 2\pi\sqrt{\frac{(3{,}13 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}82 \times 10^{23}}} = 9{,}99 \times 10^3 \text{ s}$$

$T_{500} = \dfrac{9{,}99 \times 10^3}{3600} = 2{,}77$ h : c'est bien la valeur annoncée.

PIÈGE
Laisser R_G et h en kilomètres : G est en m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}, les distances doivent être en mètres. La formule donne alors des secondes, à diviser par 3600.

COMPRENDRE
Les données ont trois chiffres significatifs : le résultat en garde trois.

À LA CALCULATRICE



Q.6 En utilisant la troisième loi de Kepler, déterminer la période de la sonde JUICE sur son orbite circulaire d'altitude 5 000 km.

Données utiles $T_{500} = 2{,}77$ h (Q.5) ; $R_G = 2{,}63 \times 10^3$ km ; $h_{500} = 500$ km ; $h_{5000} = 5\,000$ km

Troisième loi de Kepler : pour tous les satellites de Ganymède, le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ est le même, $r = R_G + h$ étant le rayon de l'orbite circulaire.

$$\frac{T_{5000}^2}{(R_G + h_{5000})^3} = \frac{T_{500}^2}{(R_G + h_{500})^3} \quad \text{donc} \quad T_{5000} = T_{500}\left(\frac{R_G + h_{5000}}{R_G + h_{500}}\right)^{3/2}$$

$$T_{5000} = 2{,}77 \times \left(\frac{2{,}63 \times 10^3 + 5\,000}{2{,}63 \times 10^3 + 500}\right)^{3/2}$$

$\boxed{T_{5000} = 10{,}5 \text{ h}}$

PIÈGE
Utiliser les altitudes à la place des rayons : $(5\,000/500)^{3/2}$ donnerait 88 h. Le rayon de l'orbite est $R_G + h$.

COMPRENDRE
Dans un rapport, les unités se simplifient : on peut laisser les distances en kilomètres et la période en heures, pourvu que numérateur et dénominateur aient la même unité.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$2.77 \times \left(\frac{2.63 \times 10^3 + 5000}{2.63 \times 10^3 + 500}\right)^{1.5} \approx 10.54266$

Q.7 À l'aide des réponses aux questions 5 et 6, estimer le nombre d'orbites effectuées par la sonde autour de Ganymède et commenter la phrase « Les 1167 orbites que la sonde JUICE effectuera autour de Ganymède […] ».

Données utiles 90 jours à 5 000 km d'altitude, $T_{5000} = 10{,}5$ h (Q.6) ; 102 jours à 500 km d'altitude, $T_{500} = 2{,}77$ h (Q.5)

Le nombre d'orbites sur une phase est $N = \dfrac{\text{durée de la phase}}{T}$, les deux durées étant en heures.

Orbite d'altitude 5 000 km : $N_{5000} = \dfrac{90 \times 24}{10{,}5} \approx 206$ orbites.

Orbite d'altitude 500 km : $N_{500} = \dfrac{102 \times 24}{2{,}77} \approx 884$ orbites.

Pour les deux phases étudiées : $N = 206 + 884 \approx 1{,}09 \times 10^3$ orbites.

Les deux autres phases (30 jours sur orbite elliptique, 30 jours à moins de 500 km) ne sont pas calculables ici et ajoutent des orbites à ce total.

$N \approx 1{,}09 \times 10^3$ orbites sur les deux phases circulaires connues : même ordre de grandeur que les 1167 annoncées (écart de 7 % environ), la phrase est cohérente.

COMPRENDRE
Sous 500 km, la période est inférieure à 2,77 h : en 30 jours, la dernière phase compterait plus de 260 orbites. Le total réel dépasserait donc 1167 : la valeur de l'article est à lire comme un ordre de grandeur.

MÉTHODE
Question ouverte : annoncer la démarche, mener un calcul par phase, additionner, puis confronter à la valeur citée en nommant ce que le calcul laisse de côté. Une démarche incomplète mais claire rapporte des points.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\frac{90 \times 24}{10.5} \approx 205.7143$

$\frac{102 \times 24}{2.77} \approx 883.7545$

$\frac{1167 - 1090}{1167} \approx 0.06598115$

Q.8 Indiquer à quel type d'ondes les ondes radio appartiennent : mécanique ou électromagnétique.

Le signal traverse le vide spatial entre Jupiter et la Terre : il ne nécessite pas de milieu matériel pour se propager.

Les ondes radio sont des ondes **électromagnétiques**.

COMPRENDRE
Une onde mécanique (son, houle, onde sismique) a besoin d'un milieu matériel. Dans le vide, toutes les ondes électromagnétiques se propagent à la célérité c.

Q.9 Montrer, en négligeant la distance entre la sonde et Jupiter, que la durée d'un aller-retour du signal radio entre la sonde JUICE et la Terre est proche de celle annoncée (1 h 46).

Données utiles distance maximale Jupiter-Terre : $d = 9{,}3 \times 10^8$ km ; $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

La sonde est supposée à la même distance de la Terre que Jupiter.
Pour un aller-retour, le signal parcourt $2d$ à la célérité c :

$$\Delta t = \frac{2d}{c} = \frac{2 \times 9{,}3 \times 10^{11}}{3{,}00 \times 10^8} = 6{,}2 \times 10^3\ \text{s}$$

Conversion : $\dfrac{6{,}2 \times 10^3}{3600} = 1{,}72$ h, soit 1 h et $0{,}72 \times 60 \approx 43$ min.

$\Delta t \approx 6{,}2 \times 10^3\ \text{s} \approx 1\ \text{h}\ 43\ \text{min}$, proche de 1 h 46 annoncée (écart de 3 % environ).

PIÈGE
Oublier le facteur 2 de l'aller-retour, ou laisser la distance en kilomètres : $9{,}3 \times 10^8$ km $= 9{,}3 \times 10^{11}$ m.

COMPRENDRE
La distance n'a que deux chiffres significatifs : le résultat aussi. C'est une durée maximale, calculée avec la plus grande distance Terre-Jupiter.

À LA CALCULATRICE

