# L'homme canon

Bac 2024 Centres étrangers 1 Jour 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

**Q.1** Exprimer l'énergie mécanique du système à la date $t = 0$ en fonction de $m$, $H$ et $V_0$.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2} m v^2 + m g z$, avec $E_{pp} = 0$ au niveau du sol ($z = 0$).

À $t = 0$, le système est en $G_0$ : $z = H$ et $v = V_0$.

$$E_m(0) = \frac{1}{2} m V_0^2 + m g H$$

**PIÈGE**
Oublier le terme $m g H$ : la bouche du canon n'est pas au niveau du sol, origine de l'axe vertical et référence choisie pour l'énergie potentielle.

**Q.2** À l'aide d'un raisonnement énergétique, déterminer la vitesse du système à l'arrivée dans le filet.

**Données utiles** $V_0 = 31\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ; $H = 8{,}0\ \text{m}$ ; $h = 8{,}0\ \text{m}$

Pendant le vol, la seule force exercée est le poids, qui est une force conservative : l'énergie mécanique du système se conserve.

Entre le départ $G_0$ et l'arrivée dans le filet (vitesse $v_F$, altitude $h$) :

$$\frac{1}{2} m V_0^2 + m g H = \frac{1}{2} m v_F^2 + m g h$$

Comme $h = H$, les énergies potentielles sont égales, donc $v_F^2 = V_0^2$.

$$v_F = V_0 = 31\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**COMPRENDRE**
Le filet est à la même altitude que la bouche du canon : toute l'énergie cinétique convertie à la montée est restituée à la descente. Seule la direction de la vitesse a changé, pas sa valeur.

**MÉTHODE**
Raisonnement énergétique : 1) forces et caractère conservatif ; 2) égalité des énergies mécaniques entre deux positions ; 3) isoler l'inconnue. La masse se simplifie, aucun calcul n'est nécessaire ici.

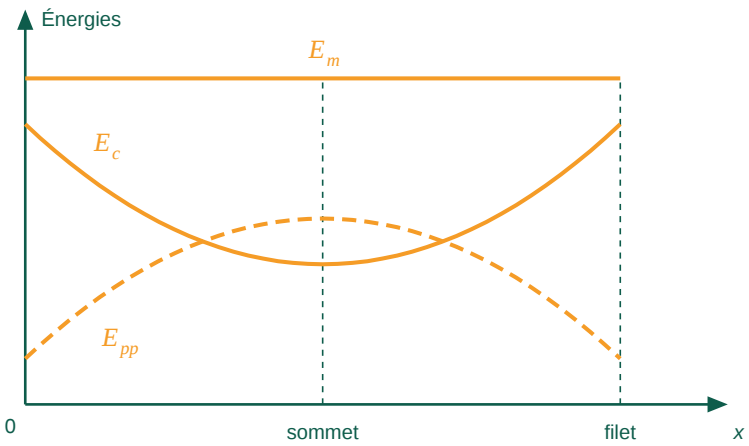
**Q.3** Représenter, sans souci d'échelle, l'évolution des énergies cinétique, potentielle de pesanteur et mécanique au cours du vol.

- $E_m$ : constante, droite horizontale.
- $E_{pp} = m g z$ : part d'une valeur non nulle ($m g H$), augmente jusqu'au sommet de la trajectoire, puis diminue et retrouve sa valeur initiale au filet.
- $E_c = E_m - E_{pp}$ : varie en sens inverse, minimale au sommet mais non nulle, puis retrouve sa valeur initiale.

Voir le graphique : à chaque instant, $E_c + E_{pp} = E_m$.

**PIÈGE**
Annuler $E_c$ au sommet. La vitesse y est horizontale et vaut $V_0 \cos \alpha$ : l'énergie cinétique passe par un minimum strictement positif.

**COMPRENDRE**
Les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'horizontale $E_m/2$. Le même tracé avec le temps $t$ en abscisse convient aussi, car $x$ est proportionnel à $t$.




**Q.3** · Énergies du système en fonction de l'abscisse $x$ (allure, sans échelle)

**Q.4** En appliquant la deuxième loi de Newton au système, exprimer les coordonnées du vecteur accélération pendant le vol.

Système {artiste + équipement}, de masse $m$ constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, l'axe $(Oz)$ est orienté vers le haut :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

**PIÈGE**
Écrire $a_z = +g$ : le signe dépend de l'orientation de l'axe $(Oz)$, ici vers le haut, à l'opposé de $\vec{g}$.

**Q.5** En déduire les équations horaires $x(t) = (V_0 \cos\alpha)\,t$ et $z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (V_0 \sin\alpha)\,t + H$.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche une primitive de chaque coordonnée :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 \\ v_z = -g\,t + C_2 \end{cases}$$

À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{V_0}$, de coordonnées $V_0 \cos\alpha$ et $V_0 \sin\alpha$ : $C_1 = V_0 \cos\alpha$ et $C_2 = V_0 \sin\alpha$.

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = V_0 \cos\alpha \\ v_z = -g\,t + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche à nouveau une primitive :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)\,t + C_3 \\ z = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (V_0 \sin\alpha)\,t + C_4 \end{cases}$$

À $t = 0$, le système est en $G_0$ : $x = 0$ et $z = H$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = H$.

$x(t) = (V_0 \cos\alpha)\,t$ et $z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (V_0 \sin\alpha)\,t + H$ : ce sont les équations attendues.

**PIÈGE**
Oublier $C_4 = H$ : le système ne part pas de l'origine O du repère, mais de $G_0$, situé à la hauteur $H$ au-dessus de O.

**MÉTHODE**
Accélération, puis vitesse, puis position : à chaque primitive, une constante par coordonnée, fixée par la condition initiale correspondante (vitesse initiale, puis position initiale).

**Q.6** Donner la valeur de la coordonnée $z(t)$ lorsque le système entre en contact avec le filet de protection.

Le filet est horizontal, à la hauteur $h$ au-dessus du sol, où se trouve l'origine de l'axe $(Oz)$.

Au contact avec le filet : $z(t_V) = h = 8{,}0$ m

**Q.7** En déduire la valeur de la durée $t_V$ du vol, puis celle de la longueur $x_V$ de la portée.

**Données utiles** $V_0 = 31\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ; $\alpha = 45^\circ$ ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ; $z(t_V) = h = H$ (Q.6)

À la date $t_V$ : $-\frac{1}{2}g\,t_V^2 + (V_0\sin\alpha)\,t_V + H = h$. Comme $h = H$ :

$$t_V\left(-\frac{1}{2}g\,t_V + V_0\sin\alpha\right) = 0$$

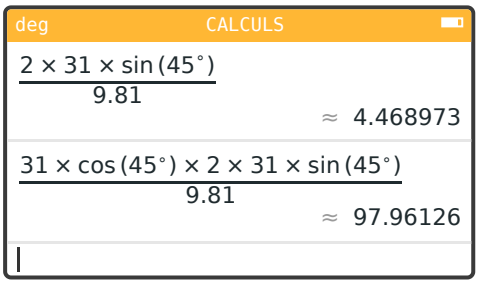
La solution $t_V = 0$ correspond au départ. La durée du vol est l'autre solution :

$$t_V = \frac{2\,V_0\sin\alpha}{g} = \frac{2\times 31\times\sin 45^\circ}{9{,}81} = 4{,}5\ \text{s}$$

La portée est l'abscisse à cette date : $x_V = (V_0\cos\alpha)\,t_V = 31\times\cos 45^\circ\times 4{,}47 = 98$ m

$t_V = 4{,}5$ s et $x_V = 98$ m

**À LA CALCULATRICE**




**PIÈGE**
Calculatrice en radians : $\sin 45$ donne alors $0{,}85$ au lieu de $0{,}71$. Vérifier le mode degrés avant le calcul.

**COMPRENDRE**
Deux chiffres significatifs, comme $V_0$ et $H$. Pour $x_V$, on garde la valeur non arrondie de $t_V$ : avec $4{,}5$ s on trouverait $99$ m.

**Q.8** Comparer la longueur estimée par ce modèle avec le record homologué de 56,64 m. Le modèle de la chute libre est-il adapté ? Proposer une explication.

**Données utiles** $x_V = 98$ m (Q.7) ; portée homologuée : $56{,}64$ m

$\dfrac{x_V}{x_{\text{record}}} = \dfrac{98}{56{,}64} \approx 1{,}7$ : le modèle prévoit une portée supérieure de plus de 40 m à la portée mesurée, soit 1,7 fois plus grande.

Un tel écart est bien trop grand pour un numéro dont le filet ne mesure qu'une quinzaine de mètres : le modèle de la chute libre n'est pas adapté.

Explication : l'action de l'air n'est pas négligeable devant le poids. À une vitesse de l'ordre de $30\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (plus de $100\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$), les frottements freinent fortement l'artiste et raccourcissent le vol.

$x_V \approx 1{,}7 \times x_{\text{record}}$ : modèle de la chute libre non adapté, les frottements de l'air ne sont pas négligeables.

**MÉTHODE**

« Comparer » demande un écart ou un rapport chiffré, puis une conclusion sur le modèle. L'explication doit remettre en cause une hypothèse précise de l'énoncé, ici l'action de l'air négligée.

**À LA CALCULATRICE**

