Métis, un satellite en sursis ?

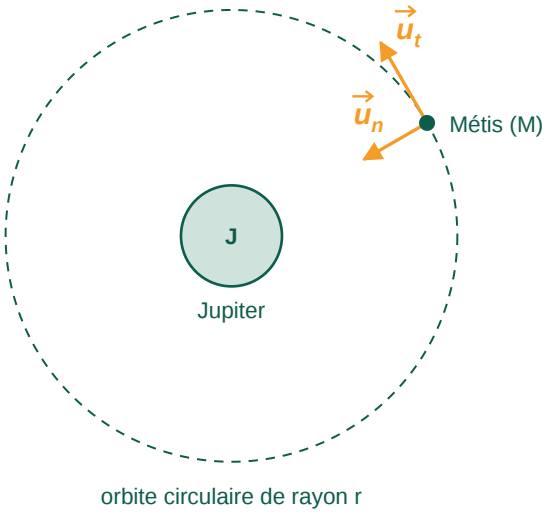
Bac 2025 Nouvelle-Calédonie Jour 1 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

1 Représenter sur un schéma Jupiter, Métis sur son orbite supposée circulaire et les vecteurs unitaires $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ du repère de Frenet.

Voir le schéma : l'orbite est un cercle de centre J (centre de Jupiter) et de rayon r ; le repère de Frenet a pour origine Métis (M).

$\vec{u}_t$ est tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement ; $\vec{u}_n$ est perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et dirigé vers le centre de Jupiter.

PIÈGE
Dessiner $\vec{u}_n$ vers l'extérieur de l'orbite, ou placer l'origine des vecteurs au centre de Jupiter : le repère de Frenet est attaché au satellite.



1 · Jupiter, Métis sur son orbite et le repère de Frenet

2 Donner l'expression vectorielle de la force de gravitation $\vec{F}$ exercée par Jupiter sur Métis en fonction de G, M_J, m, r et du ou des vecteurs unitaires adaptés du repère de Frenet.

La force est attractive, dirigée de Métis vers le centre de Jupiter, donc selon $+\vec{u}_n$; la distance entre les deux centres est r.

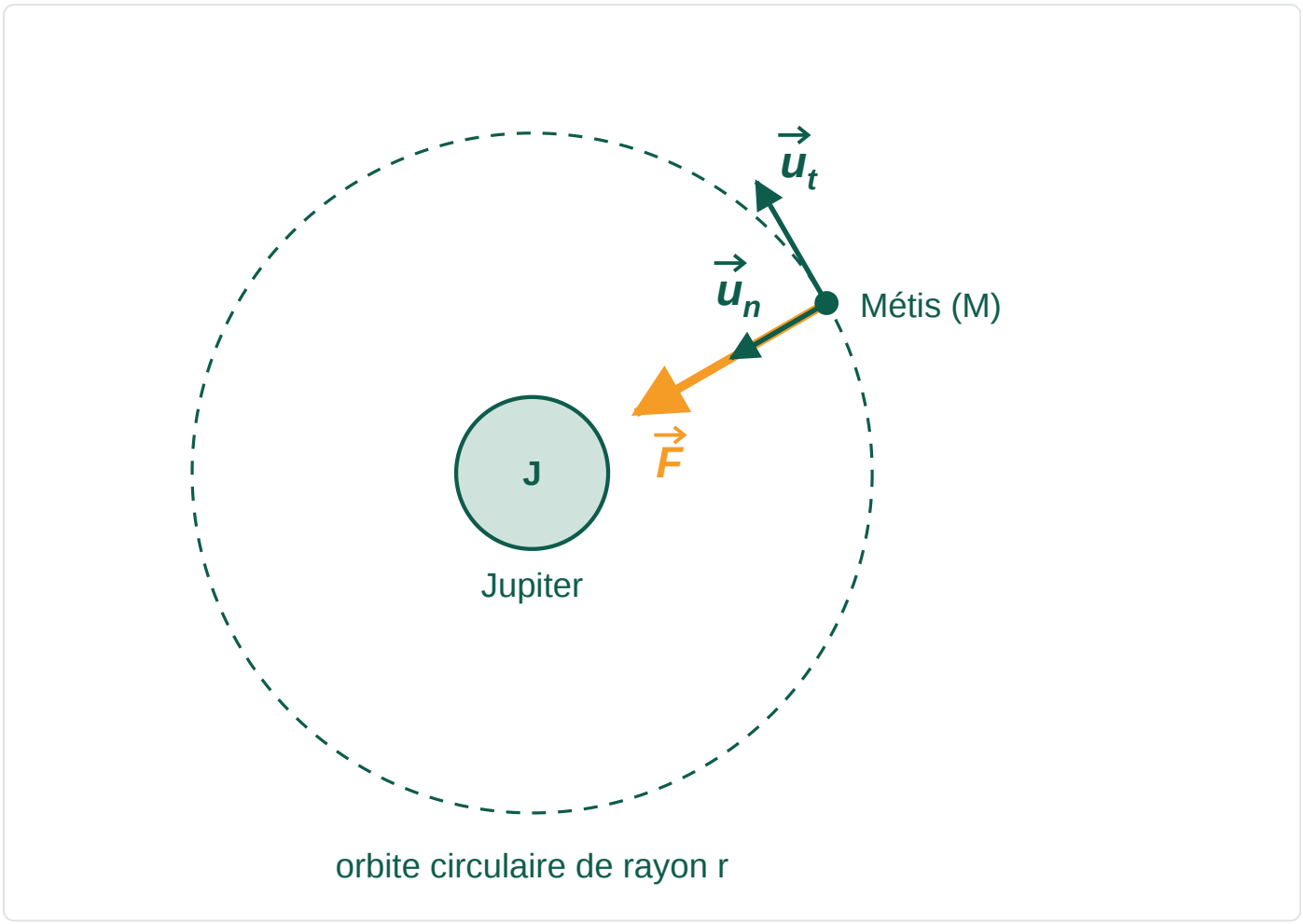
$$\vec{F} = \frac{G\,M_J\,m}{r^2}\,\vec{u}_n$$

PIÈGE
Mettre un signe « $-$ » devant $\vec{u}_n$: ce signe apparaît avec un vecteur unitaire dirigé de Jupiter vers Métis, pas avec $\vec{u}_n$ qui pointe vers le centre.

3 Représenter, sans souci d'échelle, cette force $\vec{F}$ sur le schéma de la question 1.

Voir le schéma : le vecteur $\vec{F}$ a pour origine Métis.

$\vec{F}$ est porté par la droite (MJ) et dirigé vers le centre de Jupiter, comme $\vec{u}_n$.



3 · Schéma de la question 1 complété par la force de gravitation

4 En appliquant la deuxième loi de Newton au satellite Métis en mouvement circulaire autour de Jupiter, montrer que ce mouvement circulaire est uniforme.

Système {Métis}, de masse m constante ; référentiel jovien supposé galiléen ; seule force : $\vec{F}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $\dfrac{G\,M_J\,m}{r^2}\,\vec{u}_n = m\,\vec{a}$, donc

$$\vec{a} = \frac{G\,M_J}{r^2}\,\vec{u}_n + 0\,\vec{u}_t$$

Or, dans le repère de Frenet, pour un mouvement circulaire de rayon r : $\vec{a} = \dfrac{v^2}{r}\,\vec{u}_n + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t$.

Par identification selon $\vec{u}_t$:

$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la valeur v de la vitesse est constante, le mouvement circulaire est **uniforme**.

PIÈGE

Conclure « $\vec{a}$ est constant donc le mouvement est uniforme ». Le vecteur $\vec{a}$ change de direction : c'est sa composante tangentielle nulle qui prouve l'uniformité.

MÉTHODE

Force centrale et orbite circulaire : 1) deuxième loi de Newton ; 2) $\vec{a}$ dans le repère de Frenet ; 3) identification. Selon $\vec{u}_t$: mouvement uniforme. Selon $\vec{u}_n$: la vitesse (question 5).

5 Montrer que l'expression de la valeur de la vitesse du satellite Métis vaut $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_J}{r}}$.

Par identification des deux expressions de $\vec{a}$ (question 4) selon $\vec{u}_n$:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G\,M_J}{r^2} \quad \text{donc} \quad v^2 = \frac{G\,M_J}{r}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G\,M_J}{r}}}$$

COMPRENDRE
La masse m de Métis s'est simplifiée : la vitesse sur une orbite circulaire ne dépend que de l'astre attracteur et du rayon de l'orbite. Plus l'orbite est basse, plus le satellite est rapide.

6 En déduire l'expression de la période de révolution T_M de Métis autour de Jupiter.

Le mouvement est uniforme : pendant une période T_M, Métis parcourt la circonférence $2\pi r$ de l'orbite à la vitesse v, donc $T_M = \dfrac{2\pi r}{v}$.

$$T_M = 2\pi r \times \sqrt{\frac{r}{G\,M_J}}$$

$$\boxed{T_M = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_J}}}$$

PIÈGE
Laisser $T_M = \dfrac{2\pi r}{v}$: « en déduire » demande de remplacer v par son expression de la question 5 pour obtenir T_M en fonction de r, G et M_J.

7 Retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas d'un mouvement circulaire.

On élève au carré l'expression de la question 6 : $T_M^2 = \dfrac{4\pi^2\,r^3}{G\,M_J}$.

$\dfrac{T_M^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M_J}$: ce rapport est constant, il ne dépend que de la masse de Jupiter. Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du rayon de l'orbite : c'est la troisième loi de Kepler.

COMPRENDRE
La constante est la même pour tous les satellites de Jupiter, mais elle change avec l'astre attracteur. Pour une orbite elliptique, le rayon est remplacé par le demi-grand axe.

8 Montrer que le rayon r de l'orbite de Métis autour de Jupiter vaut $1{,}28 \times 10^8$ m.

Données utiles $T_M = 7\text{ h }4\text{ min }30\text{ s}$; $M_J = 1{,}899 \times 10^{27}$ kg ; $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}

$T_M = 7 \times 3600 + 4 \times 60 + 30 = 25\,470$ s

D'après la question 7 : $r^3 = \dfrac{G\,M_J\,T_M^2}{4\pi^2}$, soit $r = \sqrt[3]{\dfrac{G\,M_J\,T_M^2}{4\pi^2}}$.

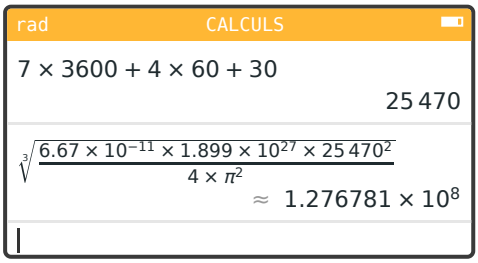
$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}899 \times 10^{27} \times 25\,470^2}{4\pi^2}} = 1{,}277 \times 10^8 \text{ m}$$

$r = 1{,}28 \times 10^8$ m : c'est bien la valeur attendue.

PIÈGE
Laisser la période en heures, ou oublier le carré sur T_M ou sur π. La racine cubique se saisit avec la puissance $1/3$, entre parenthèses.

COMPRENDRE
Trois chiffres significatifs, comme G, la donnée la moins précise. Contrôle : $v = 2\pi r / T_M$ et $v = \sqrt{G\,M_J / r}$ donnent toutes deux $3{,}15 \times 10^4$ m $\cdot$ s^{-1}.

À LA CALCULATRICE



9 Vérifier que la masse volumique de Jupiter est $\rho_J = 1\,327\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Données utiles $M_J = 1{,}899 \times 10^{27}$ kg ; $R_J = 69\,911$ km

Jupiter est assimilée à une sphère de rayon $R_J = 6{,}9911 \times 10^7$ m, de volume $V_J = \dfrac{4}{3}\pi R_J^3$.

$$\rho_J = \frac{M_J}{V_J} = \frac{3\,M_J}{4\pi R_J^3} = \frac{3 \times 1{,}899 \times 10^{27}}{4\pi \times (6{,}9911 \times 10^7)^3}$$

$\rho_J = 1{,}327 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3} = 1\,327\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$: c'est bien la valeur annoncée.

PIÈGE
Laisser R_J en kilomètres : le résultat serait 10^9 fois trop grand. Le volume d'une sphère est $\frac{4}{3}\pi R^3$, et non $4\pi R^2$ qui est son aire.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{3 \times 1.899 \times 10^{27}}{4 \times \pi \times (6.9911 \times 10^7)^3} \approx 1326.783$$

10 Calculer la limite de Roche « fluide » et la limite de Roche « rigide » pour Métis.

Données utiles $R_J = 6{,}9911 \times 10^7$ m ; $\rho_J = 1\,327\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (Q9) ; $\rho_M = 860\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

$D_{\text{fluide}} = 2{,}42 \times R_J \times \sqrt[3]{\dfrac{\rho_J}{\rho_M}}$ et $D_{\text{rigide}} = 1{,}26 \times R_J \times \sqrt[3]{\dfrac{\rho_J}{\rho_M}}$, avec R_J en mètres.

$$D_{\text{fluide}} = 2{,}42 \times 6{,}9911 \times 10^7 \times \left(\frac{1\,327}{860}\right)^{1/3} = 1{,}96 \times 10^8\ \text{m}$$

$$D_{\text{rigide}} = 1{,}26 \times 6{,}9911 \times 10^7 \times \left(\frac{1\,327}{860}\right)^{1/3} = 1{,}02 \times 10^8\ \text{m}$$

$D_{\text{fluide}} = 1{,}96 \times 10^8$ m et $D_{\text{rigide}} = 1{,}02 \times 10^8$ m

COMPRENDRE
Le rapport ρ_J/ρ_M est sans unité : la limite s'exprime dans l'unité de R_J. En mètres, elle se compare directement au rayon r de la question 8.

MÉTHODE
Les deux formules ne diffèrent que par le coefficient. Calculer une fois $R_J \times \sqrt[3]{\rho_J/\rho_M} = 8{,}08 \times 10^7$ m, puis multiplier par 2,42 et par 1,26.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$2.42 \times 6.9911 \times 10^7 \times \sqrt[3]{\frac{1327}{860}} \approx 1.955022 \times 10^8$$

$$1.26 \times 6.9911 \times 10^7 \times \sqrt[3]{\frac{1327}{860}} \approx 1.017904 \times 10^8$$

11 En se référant aux calculs de la partie A, prévoir, en justifiant, le destin de Métis.

Données utiles $r = 1{,}28 \times 10^8$ m (Q8) ; $D_{\text{fluide}} = 1{,}96 \times 10^8$ m et $D_{\text{rigide}} = 1{,}02 \times 10^8$ m (Q10)

On compare le rayon de l'orbite de Métis aux deux limites : $1{,}02 \times 10^8\ \text{m} < 1{,}28 \times 10^8\ \text{m} < 1{,}96 \times 10^8\ \text{m}$.

- $r < D_{\text{fluide}}$: Métis orbite en dessous de la limite de Roche « fluide ». Il se déforme et perd de la matière en surface, ce qui peut alimenter l'anneau principal ; il ralentit et perd peu à peu de l'altitude.
- $r > D_{\text{rigide}}$: Métis est encore au-dessus de la limite de Roche « rigide », il n'est donc pas détruit pour l'instant.

$D_{\text{rigide}} < r < D_{\text{fluide}}$: Métis est bien un satellite en sursis. Il perd de la matière et de l'altitude, et sera détruit lorsque le rayon de son orbite deviendra inférieur à D_{rigide}.

PIÈGE
Comparer r à une seule des deux limites, ou confondre le rayon de l'orbite avec l'altitude. Les limites de Roche sont des rayons d'orbite, comptés depuis le centre de Jupiter.

MÉTHODE
Pour « prévoir en justifiant » : une comparaison chiffrée, une phrase du texte pour chaque limite, puis une conclusion qui répond aux deux questions de l'introduction (matière arrachée, existence menacée).