Cargo dirigeable

Bac 2025 Amérique du Sud Jour 2 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Montrer que la masse d'hélium embarqué dans le dirigeable est proche de $m_{He} = 32$ tonnes.

Données utiles $V = 180\,000\ \text{m}^3$; $P = 1{,}1\ \text{bar}$; $\theta = 25\ ^\circ\text{C}$; $M_{He} = 4{,}0\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $R = 8{,}314\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

L'hélium est assimilé à un gaz parfait : $PV = nRT$, donc $n = \dfrac{PV}{RT}$.

Comme $m_{He} = n\,M_{He}$: $\quad m_{He} = \dfrac{PV\,M_{He}}{RT}$

avec $P = 1{,}1 \times 10^5$ Pa et $T = 25 + 273 = 298$ K.

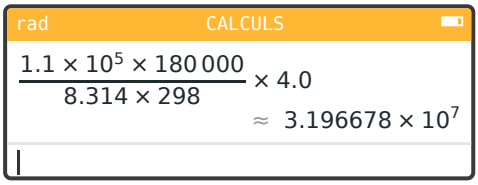
$$m_{He} = \frac{1{,}1 \times 10^5 \times 180\,000 \times 4{,}0}{8{,}314 \times 298} = 3{,}2 \times 10^7\ \text{g}$$

$m_{He} = 3{,}2 \times 10^4\ \text{kg} = 32\ \text{t}$: c'est la valeur annoncée.

PIÈGE
Laisser la pression en bar ou la température en °C. Avec M en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, la masse sort en grammes : il reste à diviser par 10^6 pour l'avoir en tonnes.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme P et M_{He}, les données les moins précises du calcul.

À LA CALCULATRICE



Q2 Choisir, en justifiant, l'expression vectorielle de la poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_a}$ exercée par l'air sur le dirigeable.

La poussée d'Archimède est verticale et dirigée vers le haut, alors que $\vec{g}$ est dirigé vers le bas : $\overrightarrow{P_a}$ est de sens opposé à $\vec{g}$, d'où le signe « $-$ ».

Sa valeur est le poids du volume d'air déplacé : $m_{air}\,g = \rho_{air}\,V\,g$.

$\overrightarrow{P_a} = -\,\rho_{air}\,V\,\vec{g}$ (troisième relation)

MÉTHODE
Pour trier des relations proposées : vérifier le sens du vecteur, puis l'unité. Ici $m_{air}\,V\,g$ est en $\text{N} \cdot \text{m}^3$, ce n'est pas une force.

Q3 Calculer la valeur de la poussée d'Archimède exercée par l'air sur le dirigeable à une altitude de 3000 m.

Données utiles figure 1 ; $V = 180\,000\ \text{m}^3$; $g = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

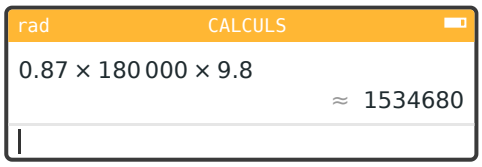
Sur la figure 1, à l'altitude 3000 m : $\rho_{air} \approx 0{,}87\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

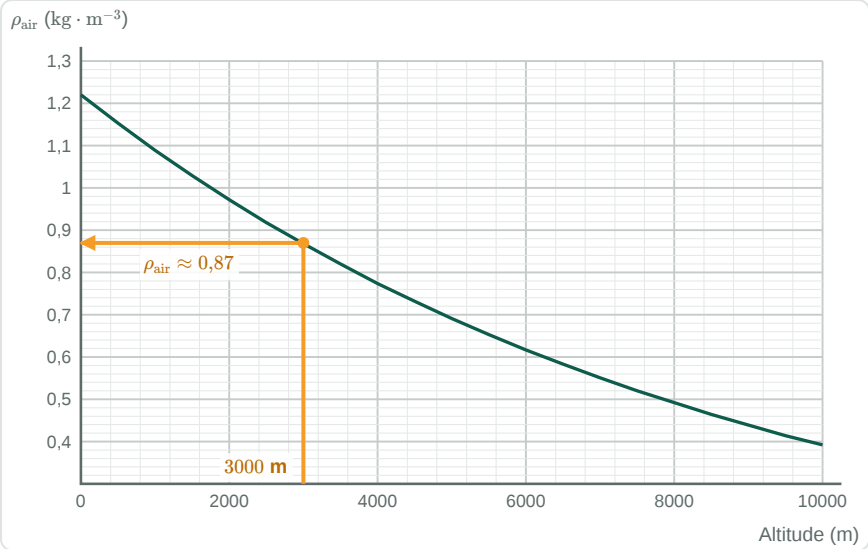
$P_a = \rho_{air}\,V\,g = 0{,}87 \times 180\,000 \times 9{,}8$

$P_a = 1{,}5 \times 10^6\ \text{N}$

PIÈGE
Prendre la masse volumique au sol ($1{,}2\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) ou celle de l'hélium. C'est l'air déplacé, à l'altitude du vol, qui compte.

À LA CALCULATRICE





Q3 · Figure 1 du sujet, avec la lecture à 3000 m

Q4 Préciser comment l'intensité de cette force évolue en fonction de l'altitude.

$P_a = \rho_{air}\, V\, g$, avec V et g constants : P_a est proportionnelle à ρ_{air}.
D'après la figure 1, ρ_{air} décroît lorsque l'altitude croît.

La poussée d'Archimède diminue quand l'altitude augmente.

COMPRENDRE
C'est ce qui limite l'altitude d'un ballon : il monte tant que la poussée dépasse son poids, puis se stabilise là où les deux se compensent.

Q5 À l'aide d'une loi de Newton que l'on citera, déterminer la relation entre le poids $\vec{P}$ du système et la poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_a}$ en vol rectiligne à altitude et vitesse constantes.

Système {dirigeable} ; référentiel terrestre supposé galiléen ; forces : le poids $\vec{P}$ et la poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_a}$.
Le mouvement est rectiligne uniforme. D'après la première loi de Newton (principe d'inertie), les forces extérieures se compensent alors : $\vec{P} + \overrightarrow{P_a} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{P_a} = -\vec{P}$, soit en valeur $P_a = P$.

COMPRENDRE
La deuxième loi de Newton avec $\vec{a} = \vec{0}$ mène au même résultat. Les forces horizontales (propulsion, frottements de l'air) se compensent entre elles et ne sont pas demandées.

Q6 Vérifier que la charge maximale transportable par ce dirigeable à 3000 m d'altitude est proche de 60 tonnes.

Données utiles $m_d = 65$ t ; $m_{He} = 32$ t (Q1) ; $P_a = \rho_{air}\, V\, g$ avec $\rho_{air} = 0,87$ kg · m^{-3} (Q3)

Le système comprend la structure, l'hélium et la charge : $P = (m_d + m_{He} + m_{charge})\, g$.
Pour la charge maximale, le poids est juste compensé par la poussée (Q5) : $P = P_a$, soit

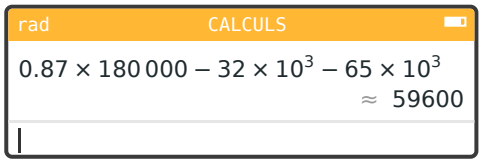
$(m_d + m_{He} + m_{charge})\, g = \rho_{air}\, V\, g$

$m_{charge} = \rho_{air}\, V - m_d - m_{He} = 0,87 \times 180\,000 - 65 \times 10^3 - 32 \times 10^3$

$m_{charge} = 6,0 \times 10^4$ kg $= 60$ t : la valeur annoncée est vérifiée.

PIÈGE
Oublier la masse de l'hélium, ou partir de P_a arrondie : $1,5 \times 10^6 \div 9,8$ donne 153 t puis 56 t de charge. Une différence amplifie l'arrondi, on garde la valeur non arrondie.

À LA CALCULATRICE



Q7 En exploitant la conservation du débit volumique, montrer que la vitesse d'écoulement v_A en A est négligeable par rapport à la vitesse v_B en B.

Données utiles $d_A = 3{,}0$ m ; $d_B = 15$ cm

L'eau est incompressible et l'écoulement permanent : le débit volumique est le même en A et en B.

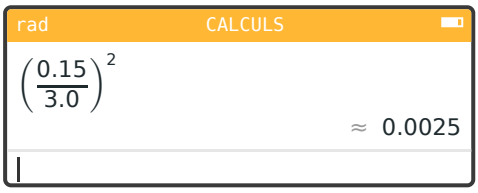
$v_A\,S_A = v_B\,S_B$ avec $S = \pi\,\dfrac{d^2}{4}$, donc $\dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{S_B}{S_A} = \left(\dfrac{d_B}{d_A}\right)^2$

$$\frac{v_A}{v_B} = \left(\frac{0{,}15}{3{,}0}\right)^2 = 2{,}5 \times 10^{-3}$$

$v_A = 2{,}5 \times 10^{-3}\,v_B$, soit $v_B = 400\,v_A$: v_A est négligeable devant v_B.

PIÈGE
Garder d_B en centimètres, ou oublier le carré : le rapport des vitesses est celui des sections, pas celui des diamètres.

À LA CALCULATRICE



Q8 En appliquant la relation de Bernoulli entre A et B, les pressions en A et B étant égales à la pression atmosphérique, montrer que $v_B = \sqrt{2\,g\,H}$.

Relation de Bernoulli sur la ligne de courant entre A et B :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho\,v_A^2 + \rho\,g\,z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho\,v_B^2 + \rho\,g\,z_B$$

Or $P_A = P_B = P_{\text{atm}}$, et v_A est négligeable devant v_B (Q7), donc $v_A^2 \ll v_B^2$. Il reste :

$\rho\,g\,z_A = \dfrac{1}{2}\rho\,v_B^2 + \rho\,g\,z_B$, soit $v_B^2 = 2\,g\,(z_A - z_B)$.

D'après la figure 2, $z_A - z_B = H$.

$v_B^2 = 2\,g\,H$, donc $v_B = \sqrt{2\,g\,H}$

MÉTHODE
Bernoulli en trois temps : écrire la relation complète entre les deux points, justifier chaque terme supprimé (pressions égales, vitesse négligeable), puis isoler la grandeur cherchée.

Q9 Déterminer la durée minimale de la vidange de l'eau nécessaire au chargement du morceau de bois. Commenter le résultat obtenu.

Données utiles $m_{\text{bois}} = 8\ \text{t}$; $\rho_{\text{eau}} = 1000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $H = 30\ \text{m}$; $d_B = 0{,}15\ \text{m}$; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Pour rester immobile, le dirigeable évacue une masse d'eau égale à celle de la charge : $m_{\text{eau}} = 8 \times 10^3\ \text{kg}$, soit un volume

$$V_{\text{eau}} = \frac{m_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{8 \times 10^3}{1000} = 8\ \text{m}^3$$

Vitesse de sortie (Q8) : $v_B = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 30} = 24{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Débit en B : $D_V = v_B\, S_B = v_B\, \pi \dfrac{d_B^2}{4} = 24{,}2 \times \pi \times \dfrac{0{,}15^2}{4} = 0{,}43\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$

Or $D_V = \dfrac{V_{\text{eau}}}{\Delta t}$, donc $\Delta t = \dfrac{V_{\text{eau}}}{D_V} = \dfrac{8}{0{,}43}$

$$\boxed{\Delta t \approx 19\ \text{s}}$$

Commentaire : cette durée est très inférieure aux « quelques minutes » visées, la solution convient. C'est une durée minimale : le modèle ignore les frottements de l'eau dans la conduite, qui réduisent la vitesse de sortie ; la vidange réelle est plus longue.

PIÈGE
Calculer le débit avec la section du réservoir au lieu de celle de la sortie B, ou s'arrêter au résultat : le commentaire est demandé et noté.

COMPRENDRE
Vider $8\ \text{m}^3$ abaisse le niveau du réservoir d'environ 1,1 m seulement, très peu devant $H = 30$ m : v_B reste quasi constante, le régime permanent est justifié.

À LA CALCULATRICE

