Traitement des eaux d'un bassin d'orage

Bac 2025 Amérique du Nord Jour 1 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q.1 Nommer les deux forces qui s'exercent sur la bouée à l'équilibre et les représenter, sans souci d'échelle, sur un schéma annoté.

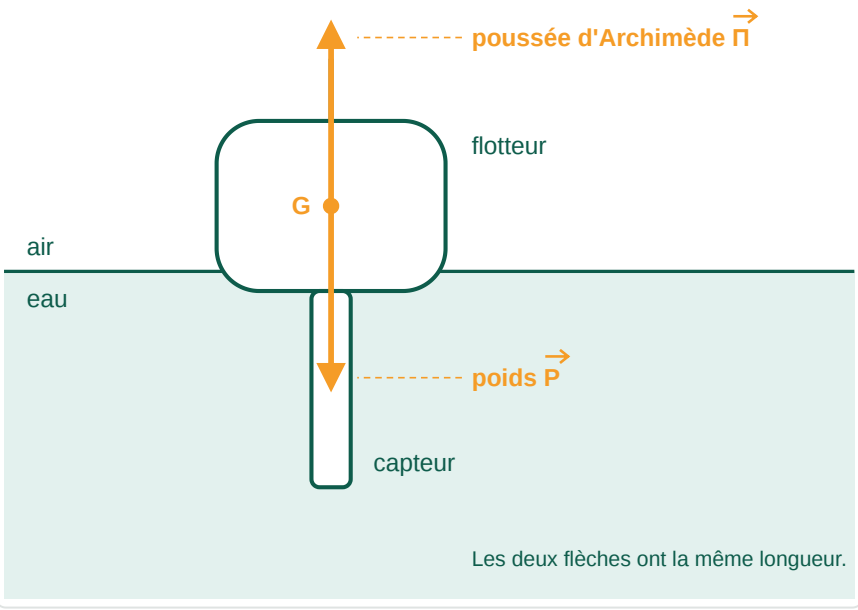
Système {bouée}, dans le référentiel terrestre. Elle est soumise à :

- son **poids** $\vec{P}$: vertical, vers le bas ;
- la **poussée d'Archimède** $\vec{\Pi}_A$ exercée par l'eau : verticale, vers le haut.

La bouée est à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{\Pi}_A = \vec{0}$. Les deux forces ont la même norme.

Poids $\vec{P}$ (vers le bas) et poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$ (vers le haut), flèches opposées de même longueur.

PIÈGE
« Sans souci d'échelle » ne dispense pas de la cohérence : à l'équilibre, deux flèches de longueurs différentes contredisent le schéma. Chaque flèche porte un nom.



Q.1 · Bouée à l'équilibre : les deux forces se compensent

Q.2 Déterminer la valeur du volume immergé V_{imm} de la bouée à l'équilibre.

Données utiles $m = 1{,}0$ kg ; $\rho_{eau} = 1{,}00 \times 10^3$ kg · m^{-3}

À l'équilibre, $\Pi_A = P$. Le volume de fluide déplacé est le volume immergé, donc :

$$\rho_{eau}\, V_{imm}\, g = m\, g \quad \text{soit} \quad V_{imm} = \frac{m}{\rho_{eau}}$$

$$V_{imm} = \frac{1{,}0}{1{,}00 \times 10^3}$$

$V_{imm} = 1{,}0 \times 10^{-3}$ m^3 (soit 1,0 L)

PIÈGE
Utiliser $V_{bouée}$ dans la poussée d'Archimède : seul le volume d'eau déplacé, donc la partie immergée, intervient.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme la masse m, donnée la moins précise. L'intensité g se simplifie : le volume immergé ne dépend pas de la pesanteur.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{1.0}{1.00 \times 10^{3}} \approx 0.001$$

Q.3 En déduire la proportion du volume immergé par rapport au volume total de la bouée. Commenter.

Données utiles $V_{imm} = 1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$ (Q.2) ; $V_{bouée} = 6{,}7 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$; immersion maximale tolérée : 20 %

$$\frac{V_{imm}}{V_{bouée}} = \frac{1{,}0 \times 10^{-3}}{6{,}7 \times 10^{-3}} = 0{,}15$$

La bouée est immergée à 15 %, ce qui est inférieur à la limite de 20 % : les instruments de communication restent hors de l'eau.

$\dfrac{V_{imm}}{V_{bouée}} = 15\ \% < 20\ \%$: la condition de flottabilité est respectée.

MÉTHODE
« Commenter » se traite en deux temps : comparer la valeur calculée au critère chiffré de l'énoncé, puis conclure sur ce que cela implique concrètement pour le dispositif.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\frac{1.0 \times 10^{-3}}{6.7 \times 10^{-3}} \approx 0.1492537$$

Q.4 Choisir, parmi les trois formules proposées, celle du débit volumique D_V et justifier par une analyse des unités.

Un débit volumique est un volume par unité de temps : il s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. La vitesse v est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, la section S en m^2.

- $\dfrac{v}{S}$: $\dfrac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m}^2} = \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, ne convient pas ;
- $S \cdot v$: $\text{m}^2 \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, convient ;
- $v^2 \cdot S$: $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}^2 = \text{m}^4 \cdot \text{s}^{-2}$, ne convient pas.

$D_V = S \cdot v$

MÉTHODE
Pour départager des formules, écrire l'unité attendue du membre de gauche, puis celle de chaque expression proposée. Une seule doit coïncider ; éliminer explicitement les autres.

Q.5 Montrer par un calcul que le débit volumique de l'eau dans la canalisation vaut $D_V = 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Données utiles $d_A = 55$ mm ; $v_A = 5{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

En A, la section est un disque de diamètre d_A : $S_A = \pi \left(\dfrac{d_A}{2}\right)^2$.

$$D_V = S_A \cdot v_A = \pi \left(\frac{d_A}{2}\right)^2 v_A$$

$$D_V = \pi \times \left(\frac{55 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 \times 5{,}6 = 1{,}33 \times 10^{-2}\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$D_V = 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, valeur attendue.

PIÈGE
Oublier de convertir d_A en mètres, ou utiliser le diamètre à la place du rayon : le débit est alors faux d'un facteur 10^6 ou 4.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$$\pi \times \left(\frac{55 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 \times 5.6 \approx 0.01330464$$

Q.6 À l'aide de la conservation du débit volumique, montrer que la vitesse de l'eau au point B vaut $16\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Données utiles $d_A = 55$ mm ; $d_B = 33$ mm ; $v_A = 5{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

L'eau est incompressible et le régime permanent : le débit volumique est le même en A et en B.

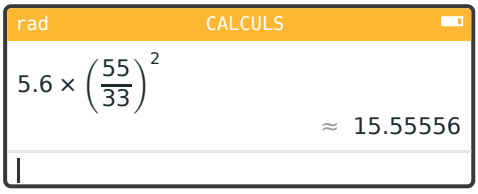
$$S_A\, v_A = S_B\, v_B \quad \text{soit} \quad \pi \frac{d_A^2}{4} v_A = \pi \frac{d_B^2}{4} v_B$$

$$v_B = v_A \left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2 = 5{,}6 \times \left(\frac{55}{33}\right)^2 = 15{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_B \approx 16\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, valeur attendue.

COMPRENDRE
Dans un rapport, les deux diamètres peuvent rester en millimètres. La vitesse varie comme l'inverse du carré du diamètre : une section plus étroite impose un écoulement plus rapide.

À LA CALCULATRICE



Q.7 Nommer le phénomène physique observé au point B et responsable de l'aspiration de l'air.

Dans le rétrécissement, la vitesse de l'eau augmente et sa pression diminue : la dépression créée en B aspire l'air par la conduite verticale.

C'est l'**effet Venturi**.

Q.8 Montrer que la variation de pression $\Delta p = p_B - p_A$ entre A et B s'écrit $\Delta p = \frac{1}{2}\rho\,(v_A^2 - v_B^2)$.

La relation de Bernoulli s'écrit entre A et B :

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 + \rho\, g\, z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2 + \rho\, g\, z_B$$

La conduite est horizontale : $z_A = z_B$, les termes $\rho\, g\, z$ se simplifient.

$$p_B - p_A = \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 - \frac{1}{2}\rho\, v_B^2$$

$$\Delta p = p_B - p_A = \frac{1}{2}\rho\,(v_A^2 - v_B^2)$$

PIÈGE
Inverser l'ordre : Δp vaut $p_B - p_A$, mais c'est $v_A^2 - v_B^2$ qui apparaît dans la parenthèse. Justifier $z_A = z_B$ par le mot « horizontale ».

Q.9 Calculer la valeur numérique de Δp. Commenter.

Données utiles $\rho_{eau} = 1{,}00 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $v_A = 5{,}6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_B = 16\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q.6)

$$\Delta p = \frac{1}{2} \times 1{,}00 \times 10^3 \times (5{,}6^2 - 16^2) = -1{,}1 \times 10^5\ \text{Pa}$$

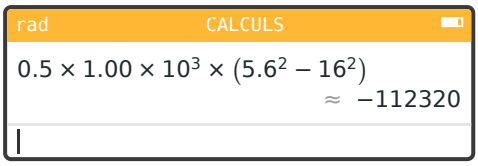
$\Delta p < 0$: la pression est plus faible en B qu'en A. Cette forte dépression au niveau du rétrécissement explique l'aspiration de l'air, en accord avec l'effet Venturi.

$\Delta p = -1{,}1 \times 10^5$ Pa : la pression chute en B.

PIÈGE
Perdre le signe « − » ou oublier de mettre les vitesses au carré. Le commentaire attendu porte sur le signe, pas seulement sur la valeur.

COMPRENDRE
Cette chute est de l'ordre de la pression atmosphérique ($1{,}0 \times 10^5$ Pa). Elle n'est possible que si p_A dépasse $1{,}1 \times 10^5$ Pa, une pression ne pouvant pas être négative : le modèle atteint ici sa limite.

À LA CALCULATRICE



Q.10 Montrer qu'il faut ajouter 344 g de dioxygène à l'eau du bassin pour que le taux de dioxygène atteigne $6\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Données utiles taux initial : $4\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$; $V_{eau} = 172\ \text{m}^3$

Le taux doit augmenter de $6 - 4 = 2\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, soit $2 \times 10^{-3}\ \text{g} \cdot \text{L}^{-1}$.

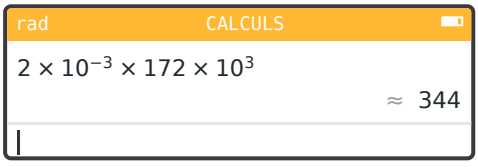
Volume du bassin : $V_{eau} = 172\ \text{m}^3 = 172 \times 10^3\ \text{L}$.

$$m(\text{O}_2) = 2 \times 10^{-3} \times 172 \times 10^3$$

$m(\text{O}_2) = 344$ g, valeur attendue.

PIÈGE
Calculer avec $6\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$: l'eau contient déjà $4\ \text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, seul l'écart est à apporter. Rappel : $1\ \text{m}^3 = 10^3$ L.

À LA CALCULATRICE



Q.11 Calculer le volume d'eau que l'aérateur doit brasser pour que la masse de dioxygène nécessaire soit assimilée.

Données utiles $m(\text{O}_2) = 344$ g (Q.10) ; 6 mg de dioxygène assimilés par litre d'eau brassé

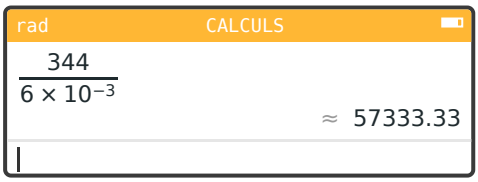
Chaque litre brassé apporte 6×10^{-3} g de dioxygène. Par proportionnalité :

$$V_{brassé} = \frac{344}{6 \times 10^{-3}} = 5{,}7 \times 10^4\ \text{L}$$

$V_{brassé} = 5{,}7 \times 10^4\ \text{L} = 57\ \text{m}^3$

COMPRENDRE
Ce volume représente le tiers du bassin : il suffit de faire passer une partie de l'eau dans l'aérateur, le dioxygène se répartit ensuite dans tout le bassin.

À LA CALCULATRICE



Q.12 Déterminer si l'oxygénation de l'eau peut être réalisée en moins de deux heures dans ces conditions.

Données utiles $V_{brassé} = 57\ \text{m}^3$ (Q.11) ; $D_V = 1{,}3 \times 10^{-2}\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ (Q.5)

L'aérateur brasse l'eau avec le débit $D_V = \dfrac{V_{brassé}}{\Delta t}$, donc :

$$\Delta t = \frac{V_{brassé}}{D_V} = \frac{57}{1{,}3 \times 10^{-2}} = 4{,}4 \times 10^3\ \text{s}$$

Soit $\Delta t = \dfrac{4{,}4 \times 10^3}{3600} = 1{,}2\ \text{h}$, durée inférieure à 2 h.

$\Delta t = 4{,}4 \times 10^3\ \text{s} \approx 1{,}2\ \text{h} < 2\ \text{h}$: l'oxygénation peut être faite à temps.

MÉTHODE

Question de synthèse : repérer les résultats déjà établis (volume à brasser, débit), les relier par une relation, convertir dans l'unité du critère, puis conclure par une comparaison explicite.

À LA CALCULATRICE

