La viscosité du glycérol

Bac 2025 Centres étrangers 1 Jour 2 · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q.1 Appliquer la seconde loi de Newton au centre de masse G de la bille et établir la relation entre $\vec{a}$, les forces $\vec{P}$, $\vec{\pi}_A$, $\vec{F}$ et la masse m.

Système {bille}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces extérieures : le poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{\pi}_A$ et la force de frottement $\vec{F}$.

Seconde loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit

$$\vec{P} + \vec{\pi}_A + \vec{F} = m\,\vec{a}$$

MÉTHODE
Toujours les quatre mêmes étapes : système, référentiel galiléen, bilan des forces, loi écrite sous forme vectorielle. La projection sur l'axe ne vient qu'ensuite.

Q.2 Montrer que la valeur v de la vitesse de la bille vérifie l'équation différentielle (1) : $m\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -k\,v + m\,g - \rho_F\,V_F\,g$.

Données utiles $\pi_A = \rho_F\,V_F\,g$; $F = k\,v$; axe Oz vertical orienté vers le bas

On projette la relation de Q.1 sur l'axe Oz, orienté vers le bas :

- le poids est vers le bas : $P_z = +m\,g$;
- la poussée d'Archimède est vers le haut : $\pi_{A,z} = -\rho_F\,V_F\,g$;
- le frottement est vers le haut : $F_z = -k\,v$.

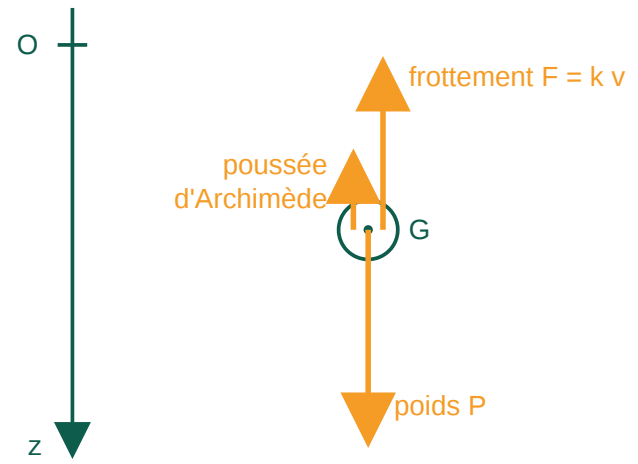
Donc $m\,g - \rho_F\,V_F\,g - k\,v = m\,a_z$.

La bille descend le long de l'axe : $v_z = v$ et $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -k\,v + m\,g - \rho_F\,V_F\,g$$: c'est l'équation (1).

PIÈGE
Le signe de chaque terme dépend du sens de l'axe. Ici Oz pointe vers le bas : le poids est compté positivement, les deux forces dirigées vers le haut négativement.

COMPRENDRE
Dans l'équation (1), le sujet écrit « v_F » en minuscule : c'est une coquille, il s'agit du volume V_F de fluide déplacé, et non d'une vitesse.



Q.2 · Les trois forces exercées sur la bille et l'axe de projection

Q.3 Indiquer la nature du mouvement de la bille lorsque $v = v_{lim}$ et préciser alors la valeur de l'accélération de la bille.

La trajectoire est une droite verticale et la valeur de la vitesse ne varie plus : le mouvement est **rectiligne uniforme**.

Le vecteur vitesse est alors constant, donc $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$.

Mouvement rectiligne uniforme ; $a = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

COMPRENDRE
D'après le principe d'inertie, les forces se compensent alors : le poids est équilibré par la somme de la poussée d'Archimède et du frottement.

Q.4 À l'aide de l'équation (1), exprimer la constante k quand la vitesse atteint la valeur constante v_{lim}.

Quand $v = v_{lim}$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ (Q.3). L'équation (1) devient :

$$0 = -k\,v_{lim} + m\,g - \rho_F\,V_F\,g$$

d'où $k\,v_{lim} = g\,(m - \rho_F\,V_F)$.

$$k = \frac{g\,(m - \rho_F\,V_F)}{v_{lim}}$$

MÉTHODE
Pour trouver une valeur limite à partir d'une équation différentielle, il suffit d'annuler la dérivée : inutile de connaître la solution.

Q.5 Déterminer l'unité de la constante k à l'aide d'une analyse dimensionnelle ou d'une analyse utilisant les unités.

D'après Q.4, $k = \dfrac{g\,(m - \rho_F\,V_F)}{v_{lim}}$.

- g s'exprime en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$;
- $\rho_F\,V_F$ s'exprime en $\mathrm{kg \cdot m^{-3} \times m^3 = kg}$, comme m : la parenthèse est en kg ;
- v_{lim} s'exprime en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Unité de k : $\dfrac{\mathrm{m \cdot s^{-2} \times kg}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}} = \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$

k s'exprime en $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$.

PIÈGE
Répondre « $\mathrm{N \cdot s \cdot m^{-1}}$ » sans aller jusqu'aux unités de base : le sujet donne la viscosité en $\mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}}$, il faut rester cohérent.

COMPRENDRE
Même résultat avec $F = k\,v$: un newton vaut $1\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$ (car $P = m\,g$), divisé par des $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Q.6 Montrer que la viscosité du fluide s'exprime : $\eta = \dfrac{g\,(m - \rho_F\,V_F)}{6\pi\,R\,v_{lim}}$.

Données utiles $k = 6\pi\,\eta\,R$; expression de k (Q.4)

On égale les deux expressions de k :

$$6\pi\,\eta\,R = \frac{g\,(m - \rho_F\,V_F)}{v_{lim}}$$

On divise les deux membres par $6\pi\,R$:

$$\eta = \frac{g\,(m - \rho_F\,V_F)}{6\pi\,R\,v_{lim}}$$

Q.7 Montrer que la valeur de la vitesse v_{lim} est égale à $9{,}82 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ au cours de l'expérience n°1.

Données utiles $L = 5{,}0 \times 10^{-1}$ m ; $\Delta t = 50{,}9$ s

Entre les deux graduations, le régime permanent est atteint : la bille a un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_{lim}.

$$v_{lim} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{5{,}0 \times 10^{-1}}{50{,}9} = 9{,}82 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$v_{lim} = 9{,}82 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$: c'est bien la valeur attendue.

PIÈGE
La relation $v = L/\Delta t$ n'est valable que si la vitesse est constante : il faut le justifier par le régime permanent, sinon on calcule seulement une vitesse moyenne.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{5.0 \times 10^{-1}}{50.9} \approx 0.009823183$

COMPRENDRE

Chiffres significatifs : L n'en a que deux, le résultat devrait s'écrire $9{,}8 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. On garde ici les trois chiffres de la valeur imposée par le sujet.

Q.8 Calculer la viscosité du glycérol grâce aux données de l'expérience n°1.

Données utiles $m = 3{,}30 \times 10^{-5}$ kg ; $V_{bille} = 4{,}19 \times 10^{-9}\ \text{m}^3$; $R = 1{,}00 \times 10^{-3}$ m ; $\rho = 1260\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; v_{lim} (Q.7)

La bille est entièrement immergée : le volume de fluide déplacé est celui de la bille, $V_F = V_{bille}$, et $\rho_F = \rho$.

$$\eta = \frac{g\,(m - \rho\, V_{bille})}{6\pi\, R\, v_{lim}}$$

$$\eta = \frac{9{,}81 \times (3{,}30 \times 10^{-5} - 1260 \times 4{,}19 \times 10^{-9})}{6\pi \times 1{,}00 \times 10^{-3} \times 9{,}82 \times 10^{-3}}$$

$\eta = 1{,}47\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE

À la calculatrice, mettre tout le dénominateur entre parenthèses ; sans elles, R et v_{lim} se retrouvent multipliés au lieu d'être divisés.

COMPRENDRE

On retrouve la valeur de l'expérience n°1 du document 3. La poussée d'Archimède n'est pas négligeable : $\rho\, V_{bille} = 5{,}28 \times 10^{-6}$ kg, soit 16 % de la masse de la bille.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{9.81 \times (3.30 \times 10^{-5} - 1260 \times 4.19 \times 10^{-9})}{6 \times \pi \times 1.00 \times 10^{-3} \times 9.82 \times 10^{-3}} \approx 1.469126$

$1260 \times 4.19 \times 10^{-9} \approx 5.2794 \times 10^{-6}$

Q.9 Calculer la valeur moyenne de la viscosité $\overline{\eta}$ et l'incertitude associée $u(\overline{\eta})$.

Données utiles document 3 : 1,47 ; 1,50 ; 1,48 ; 1,45 ; 1,52 ; 1,46 (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$) ; $N = 6$; $\sigma_{n-1} = 2{,}6 \times 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Moyenne des six mesures :

$$\overline{\eta} = \frac{1{,}47 + 1{,}50 + 1{,}48 + 1{,}45 + 1{,}52 + 1{,}46}{6} = 1{,}48\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

Incertitude-type :

$$u(\overline{\eta}) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{N}} = \frac{2{,}6 \times 10^{-2}}{\sqrt{6}} = 1{,}06 \times 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

On arrondit l'incertitude par excès, à deux chiffres significatifs.

$\overline{\eta} = 1{,}48\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ et $u(\overline{\eta}) = 0{,}011\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE

Ne pas confondre l'écart-type σ_{n-1}, dispersion des mesures, et l'incertitude-type sur la moyenne, qui est $\sqrt{N}$ fois plus petite.

COMPRENDRE

Une incertitude s'écrit avec un ou deux chiffres significatifs, arrondie par excès. Avec un seul chiffre, on écrirait $u(\overline{\eta}) = 0{,}02\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, réponse acceptée elle aussi.

MÉTHODE

L'écart-type s'obtient avec le mode statistique de la calculatrice : saisir les six valeurs en liste, puis lire la moyenne et l'écart-type d'échantillon (noté s_x ou σ_{n-1}), ici 0,026.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$\dfrac{1.47 + 1.50 + 1.48 + 1.45 + 1.52 + 1.46}{6} \approx 1.48$

$\dfrac{2.6 \times 10^{-2}}{\sqrt{6}} \approx 0.01061446$

Q.10 Conclure sur la fiabilité des mesures obtenues à l'aide du viscosimètre du lycée.

Données utiles $\eta_{ref} = 1{,}49\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$; $\overline{\eta}$ et $u(\overline{\eta})$ (Q.9)

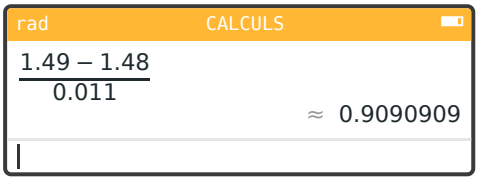
On calcule le quotient proposé par le sujet :

$$\frac{|\overline{\eta} - \eta_{ref}|}{u(\overline{\eta})} = \frac{|1{,}48 - 1{,}49|}{0{,}011} = 0{,}9$$

Ce quotient est inférieur à 2 : l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence est plus petit que l'incertitude-type.

Quotient $\approx 0{,}9 < 2$: la mesure est compatible avec la valeur de référence, le viscosimètre du lycée est fiable.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
S'arrêter à la valeur du quotient. La question demande de conclure : il faut comparer à 2 puis dire explicitement si le dispositif est fiable.

COMPRENDRE
Le seuil de 2 est le critère usuel de compatibilité. Avec $u(\overline{\eta}) = 0{,}02\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, le quotient vaut 0,5 : la conclusion est identique.