Exercice 3

EXERCICE 3 : LA VISCOSITÉ DU GLYCÉROL (6 POINTS)



La viscosité est une grandeur physico-chimique caractéristique d'un fluide qui traduit la résistance de ce fluide au mouvement. Plus la viscosité du fluide est élevée, plus le fluide s'écoule difficilement. La valeur de la viscosité dépend de la température du fluide et elle s'exprime en $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$.

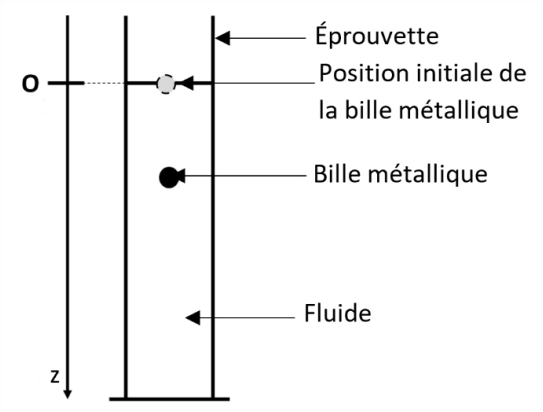
La viscosité peut être mesurée expérimentalement à l'aide d'un viscosimètre à chute de bille de laboratoire (voir photo).

Au lycée, on peut concevoir un viscosimètre analogue à celui de la photo à l'aide d'une éprouvette graduée remplie du fluide étudié au sein de laquelle on étudie la chute d'une bille métallique sphérique. L'objectif de cet exercice est d'étudier la fiabilité des mesures obtenues à l'aide d'un tel viscosimètre.

1. Étude théorique de la chute d'une bille sphérique métallique dans un fluide

On étudie le mouvement d'une bille métallique sphérique de masse m, de rayon R lâchée sans vitesse initiale dans une éprouvette graduée remplie d'un fluide.

Le mouvement de chute de la bille étant rectiligne, on choisit un repère Oz pour étudier ce mouvement. L'origine O du repère coïncide avec la position initiale du centre de masse G de la bille et l'axe est vertical et orienté vers le bas (voir le document 1).



Document 1. Schéma du dispositif expérimental pour l'étude de la chute d'une bille dans un fluide

Au cours de sa chute, la bille est soumise à :

- son poids $\vec{P}$
- la poussée d'Archimède, notée $\vec{\pi_A}$, exercée par le fluide sur la bille, verticale, vers le haut, de norme $\pi_A = \rho_F \times V_F \times g$.

  avec : ρ_F est la masse volumique du fluide dans lequel la bille chute en $kg \cdot m^{-3}$;

  V_F est le volume de fluide déplacé en m^3 ;

  g est l'intensité du champ de pesanteur.

Exercice 3

- la force de frottement exercée par le fluide sur la bille, notée $\vec{F}$, verticale, vers le haut, de norme $F = k \times v$.

  avec : k est une constante qui dépend de la viscosité du fluide ;

  v est la vitesse de la bille à l'instant t.

La bille est assimilée à son centre de masse G. On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Q.1. Appliquer la seconde loi de Newton au centre de masse G de la bille et établir la relation entre le vecteur accélération $\vec{a}$, les forces $\vec{P}$, $\overrightarrow{\pi_A}$, $\vec{F}$ et la masse m de la bille.

Q.2. Montrer alors que la valeur v de la vitesse de la bille vérifie l'équation différentielle suivante :

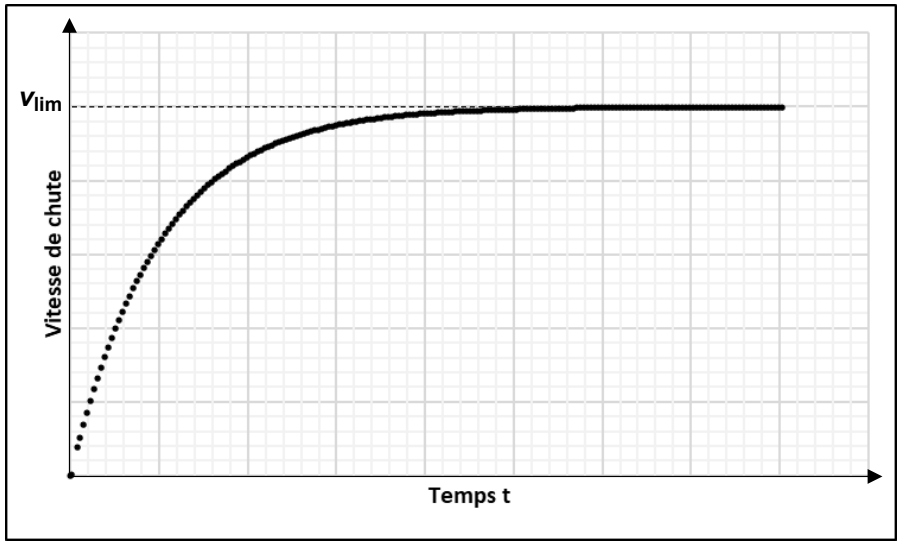
$$m \frac{dv}{dt} = - kv + mg - \rho_F v_F g \qquad \text{équation (1)}$$

On admet que la solution de l'équation différentielle précédente est de la forme : $v = v_{lim} \times (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ où v_{lim} est la vitesse limite atteinte par la bille et τ est un temps caractéristique qui vaut :

$$\tau = \frac{m}{k} \qquad \text{expression (2)}$$

Une résolution numérique de l'équation différentielle permet d'obtenir le graphe présenté sur le document 2 et montre l'existence d'une valeur limite de la vitesse v_{lim}.

Le temps nécessaire pour que la bille atteigne la vitesse limite est proportionnelle au temps caractéristique τ.



Document 2. Évolution temporelle de la vitesse v de chute de la bille dans le fluide

Q.3. Indiquer la nature du mouvement de la bille lorsque $v = v_{lim}$ et préciser alors la valeur de l'accélération de la bille.

Exercice 3

Q.4. À l'aide de l'équation (1), exprimer la constante k quand la vitesse atteint la valeur constante v_{lim}.

Q.5. Déterminer l'unité de la constante k à l'aide d'une analyse dimensionnelle ou d'une analyse utilisant les unités.

La constante k peut aussi s'exprimer : $k = 6\pi \times \eta \times R$ avec R le rayon de la bille et η la viscosité du fluide.

Q.6. Montrer que la viscosité du fluide s'exprime alors : $\eta = \frac{g(m - \rho_F V_F)}{6\pi R v_{lim}}$.

Selon cette relation, on verra par la suite qu'il est possible d'évaluer η par mesure de v_{lim}, les autres paramètres étant connus.

2. Fiabilité du viscosimètre du lycée : mesure de la viscosité du glycérol

Une éprouvette de volume 1 L est remplie de glycérol maintenu à la température de 20°C.

À l'aide d'un chronomètre, on mesure la durée Δt nécessaire à une bille en acier pour parcourir la distance entre deux graduations sur l'éprouvette. La première graduation doit être suffisamment éloignée de l'interface glycérol/air pour s'assurer que le régime permanent est atteint. La seconde graduation est choisie suffisamment éloignée de la première pour améliorer la précision de la mesure.

Données :

- Masse de la bille : $m = 3{,}30 \times 10^{-5}$ kg ;
- Volume de la bille : $V_{bille} = 4{,}19 \times 10^{-9}$ m^3 ;
- Rayon de la bille : $R = 1{,}00 \times 10^{-3}$ m ;
- Masse volumique du glycérol : $\rho = 1260$ kg·m^{-3} ;
- Intensité du champ de pesanteur : $g = 9{,}81$ m·s^{-2} ;
- Distance entre les deux graduations choisies sur l'éprouvette : $L = 5{,}0 \times 10^{-1}$ m.

Au cours d'une expérience n°1, on a mesuré une durée $\Delta t = 50{,}9$ s pour que la bille parcourt la distance L séparant les deux graduations sur l'éprouvette.

Q.7. Montrer que la valeur de la vitesse v_{lim} est égale à $9{,}82 \times 10^{-3}$ m·s^{-1} au cours de l'expérience n°1.

Q.8. Calculer la viscosité du glycérol grâce aux données de l'expérience n°1.

Exercice 3

Dans les mêmes conditions que l'expérience n°1, on a mesuré à nouveau 5 fois (expériences n°2 à 6) la viscosité du glycérol. Les résultats sont rassemblés dans le tableau du document 3.

Expériences	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
η à 20°C (en kg·m^{-1}·s^{-1})	1,47	1,50	1,48	1,45	1,52	1,46

Document 3. Valeurs de la viscosité du glycérol mesurées à 20°C

Rappels :

- pour une mesure X réalisée N fois, on attribue comme valeur à X, la moyenne (arithmétique) $\overline{X}$ des valeurs de ces N mesures. L'incertitude-type associée à cette valeur vaut $u(\overline{X}) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{N}}$ où σ_{n-1} est l'écart-type expérimental.
- pour évaluer la compatibilité d'une valeur mesurée X avec une valeur de référence X_{ref}, on peut calculer le quotient : $\frac{|X-X_{ref}|}{u(X)}$.

Q.9. Calculer la valeur moyenne de la viscosité $\overline{\eta}$ et l'incertitude associée $u(\overline{\eta})$.

La valeur de référence de la viscosité du glycérol pur à 20 °C est η_{ref} = 1,49 kg·m^{-1}·s^{-1}. L'écart-type expérimental de la série de mesures de la viscosité donnée au document 3 vaut : σ_{n-1} = 2,6 x 10^{-2} kg·m^{-1}·s^{-1}.

Q.10. Conclure sur la fiabilité des mesures obtenues à l'aide du viscosimètre du lycée.