Autour du basket-ball

Bac 2024 Métropole Jour 2 · Exercice 1 **11 points** **Durée conseillée 1 h 55**

Q1 Montrer que les coordonnées du vecteur accélération du centre de masse M du ballon sont $a_x(t) = 0$ et $a_y(t) = -g$.

Système {ballon}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ (frottements négligés).

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, alors que l'axe (Oy) est orienté vers le haut. En projetant :

$$a_x(t) = 0 \quad \text{et} \quad a_y(t) = -g$$

PIÈGE
Oublier de justifier le signe « $-$ » : il vient de l'axe (Oy) orienté vers le haut, à l'opposé de $\vec{g}$.

MÉTHODE
Toujours les quatre mêmes étapes : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton. La projection sur les axes vient ensuite.

Q2 Exprimer les coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse du point M à chaque instant.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives des coordonnées de $\vec{a}$:

$v_x(t) = C_1$ et $v_y(t) = -g\,t + C_2$

À $t = 0$, le vecteur vitesse est $\vec{v}_0$, de coordonnées $v_0\cos(\alpha)$ et $v_0\sin(\alpha)$: $C_1 = v_0\cos(\alpha)$ et $C_2 = v_0\sin(\alpha)$.

$$v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad v_y(t) = -g\,t + v_0\sin(\alpha)$$

COMPRENDRE
La vitesse horizontale reste constante : aucune force n'agit selon (Ox). Seule la vitesse verticale change au cours du vol.

Q3 Exprimer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ au cours du temps.

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives des coordonnées de $\vec{v}$:

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t + C_3$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + C_4$

À $t = 0$, le point M est en M_0 : $x(0) = 0$ et $y(0) = H_m$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = H_m$.

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + H_m$$

PIÈGE
Écrire $y(0) = 0$. L'origine O est au sol : au départ, le centre du ballon est à la hauteur H_m.

Q4 Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit $y(x) = -\dfrac{g}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}\,x^2 + x\tan(\alpha) + H_m$.

On élimine le temps. Comme $\alpha \neq 90^\circ$, $\cos(\alpha) \neq 0$ et l'équation de $x(t)$ donne $t = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$.

On remplace dans $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\right)^2 + v_0\sin(\alpha)\,\frac{x}{v_0\cos(\alpha)} + H_m$$

Avec $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$:

$$y(x) = -\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}\,x^2 + x\tan(\alpha) + H_m$$

MÉTHODE
Équation de trajectoire : isoler t dans $x(t)$, le reporter dans $y(t)$, puis simplifier. On obtient une parabole.

Q5 Montrer qu'il existe une vitesse initiale v_{0c} pour laquelle la trajectoire du centre de masse passe par le centre C du panier, et retrouver son expression.

Le point C a pour coordonnées $x_C = L$ et $y_C = H_a$. La trajectoire passe par C si $y(L) = H_a$:

$$H_a = -\frac{g\,L^2}{2\,v_{0c}^2\cos^2(\alpha)} + L\tan(\alpha) + H_m$$

$$\frac{g\,L^2}{2\,v_{0c}^2\cos^2(\alpha)} = L\tan(\alpha) + H_m - H_a$$

$$v_{0c}^2 = \frac{g\,L^2}{2\cos^2(\alpha)\left(L\tan(\alpha) + H_m - H_a\right)}$$

Une vitesse est positive, d'où :

$$v_{0c} = \sqrt{\frac{g\,L^2}{2\cos^2(\alpha)\left(L\tan(\alpha) + H_m - H_a\right)}}$$

COMPRENDRE
La racine n'existe que si $L\tan(\alpha) + H_m - H_a > 0$: il faut viser plus haut que la droite qui joint M_0 à C, puisque le ballon retombe.

Q6 Calculer la vitesse initiale v_{0c} pour un lancer-franc tiré avec un angle initial de 49,5°.

Données utiles $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $L = 4{,}6$ m ; $H_m = 2{,}30$ m ; $H_a = 3{,}05$ m ; $\alpha = 49{,}5^\circ$

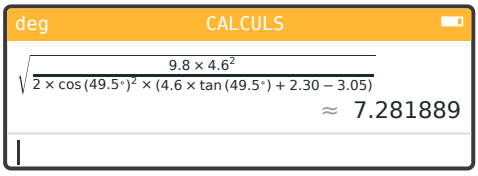
$$v_{0c} = \sqrt{\frac{9{,}8 \times 4{,}6^2}{2 \times \cos^2(49{,}5^\circ) \times \left(4{,}6 \times \tan(49{,}5^\circ) + 2{,}30 - 3{,}05\right)}}$$

$$v_{0c} = 7{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

PIÈGE
Calculatrice restée en radians : le résultat est faux sans que rien ne le signale. Vérifier le mode degrés avant de saisir.

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs, comme g et L, les données les moins précises. Environ $26\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$: ordre de grandeur réaliste pour un tir.

À LA CALCULATRICE



Q7 Déterminer graphiquement l'angle initial qui donne la vitesse initiale minimale pour $L = 2$ m. Comparer l'angle et la vitesse à ceux du lancer-franc et commenter.

Données utiles lancer-franc : $\alpha = 49{,}5^\circ$ et $v_{0c} = 7{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q6)

Sur la figure 2-b, le point le plus bas de la courbe a pour abscisse $\alpha \approx 55{,}2^\circ$ et pour ordonnée $v_0 \approx 5{,}32\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

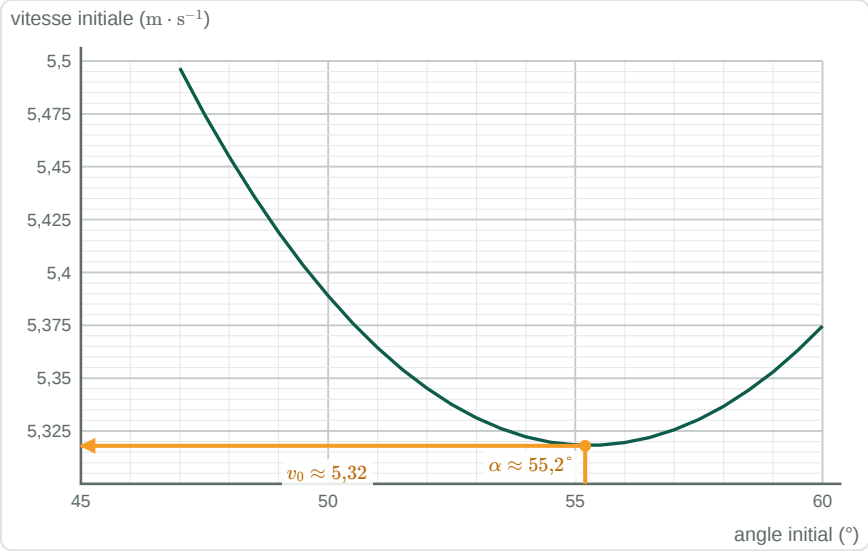
Comparaison avec le lancer-franc : à 2 m du panier, la vitesse minimale est plus faible ($5{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ contre $7{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et l'angle correspondant est plus grand (55,2° contre 49,5°).

Commentaire : plus le joueur est près du panier, moins il doit lancer fort, mais plus il doit tirer « en cloche ».

Pour $L = 2$ m : $\alpha \approx 55{,}2^\circ$ et $v_0 \approx 5{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; vitesse plus faible et angle plus grand qu'au lancer-franc.

PIÈGE
Lire sur la figure 2-a : son échelle ne permet pas de situer le minimum. Et « comparer » porte sur les deux grandeurs, l'angle et la vitesse.

COMPRENDRE
Près du minimum la courbe est très plate : entre 52° et 58° la vitesse change de moins de $0{,}03\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Une lecture à un demi-degré près suffit.



Q7 · Figure 2-b du sujet ($L = 2$ m), avec la lecture du minimum

Q8 Expliquer pourquoi la courbe de la vitesse en fonction de l'angle initial tend vers une asymptote verticale lorsque l'angle se rapproche de 90°.

Sous la racine de v_{0c} (Q5), le dénominateur vaut $2\,D$ avec $D = \cos^2(\alpha)\left(L\tan(\alpha) + H_m - H_a\right)$.

Comme $\cos(\alpha)\tan(\alpha) = \sin(\alpha)$, on développe :

$$D = L\sin(\alpha)\cos(\alpha) + (H_m - H_a)\cos^2(\alpha)$$

Quand α se rapproche de 90°, $\cos(\alpha)$ tend vers 0 : les deux termes tendent vers 0, alors que le numérateur $g\,L^2$ reste constant.

v_{0c} tend vers l'infini quand α tend vers 90° : la courbe admet une asymptote verticale en $\alpha = 90^\circ$.

PIÈGE
Dire seulement « $\cos(\alpha)$ tend vers 0 » ne suffit pas : $\tan(\alpha)$ tend vers l'infini dans le même produit. Il faut développer pour lever le doute.

COMPRENDRE
Physiquement : la vitesse horizontale $v_0\cos(\alpha)$ devient presque nulle. Pour parcourir quand même la distance L, il faudrait un vol très long, donc une vitesse initiale immense.

Q9 Choisir le code qui complète la ligne 82 pour vérifier la condition « le ballon ne passe pas au-dessus de l'arceau ».

Le tableau y contient les altitudes successives du centre de masse du ballon. Si la plus grande de ces altitudes reste inférieure à la hauteur H_a de l'arceau, le ballon ne passe jamais au-dessus de l'arceau.

Ligne 82 : `if max(y) < Ha:`

COMPRENDRE
Les trois autres propositions comparent une abscisse à une hauteur, ou une altitude à une distance horizontale : elles n'ont pas de sens pour cette condition.

Q10 Justifier que les lignes 89 à 92 permettent de tester la condition 2 (le ballon ne rebondit pas sur le bord du panier).

La fonction d_bord (lignes 86-87) calcule la distance entre le centre du ballon, de coordonnées $(x\,;\,y)$, et le bord de l'arceau le plus proche du joueur, de coordonnées $(L - R_a\,;\,H_a)$.

Ligne 89 : la variable test vaut False au départ.

Lignes 90 à 92 : la boucle parcourt les N_x points de la trajectoire. Si, pour l'un d'eux, cette distance est inférieure au rayon R_b du ballon, le ballon touche l'arceau et test prend la valeur True.

À la fin de la boucle, test vaut True si le ballon a touché le bord de l'arceau en un point au moins de sa trajectoire : la condition 2 est bien testée.

COMPRENDRE
Le ballon est une sphère de rayon R_b : il touche un obstacle dès que son centre s'en approche à moins de R_b.

Q11 L'angle initial minimal pour un tir parfait au lancer-franc est voisin de 45°. Commenter cette valeur au regard des conseils du site internet.

Le site conseille un angle de tir compris entre 47° et 55°. Tous ces angles sont supérieurs à l'angle minimal de 45° : ils permettent un tir parfait.

La borne basse conseillée (47°) laisse en plus une marge de 2° au-dessus du minimum.

Les conseils du site sont en accord avec la deuxième modélisation.

COMPRENDRE
L'angle de 49,5° qui demande la vitesse la plus faible (Q6) est lui aussi dans l'intervalle conseillé.

Q12 Identifier, parmi les courbes 1, 2 et 3 de la figure 4, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie mécanique, en justifiant.

- Courbe 3 : énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Le ballon est lâché sans vitesse initiale : E_c est nulle à $t = 0$, puis augmente pendant la chute.
- Courbe 2 : énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = m\,g\,y$. Elle est maximale au départ, diminue quand le ballon descend et s'annule au sol, vers $t = 0{,}47$ s.
- Courbe 1 : énergie mécanique $E_m = E_c + E_{pp}$. À chaque instant, ses valeurs sont la somme de celles des deux autres courbes.

Courbe 1 : E_m ; courbe 2 : E_{pp} ; courbe 3 : E_c.

MÉTHODE
Regarder l'instant initial : « sans vitesse initiale » donne $E_c = 0$, « lâché d'une hauteur » donne E_{pp} maximale. L'énergie mécanique est la courbe située au-dessus des deux autres.

Q13 Montrer que l'énergie perdue par le ballon lors du rebond est voisine de 2,5 J.

On lit l'énergie mécanique (courbe 1) de part et d'autre du rebond, qui a lieu vers $t = 0{,}47$ s :

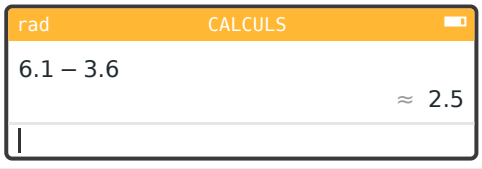
- avant le rebond : $E_{m,\text{avant}} \approx 6{,}1$ J ;
- après le rebond : $E_{m,\text{après}} \approx 3{,}6$ J.

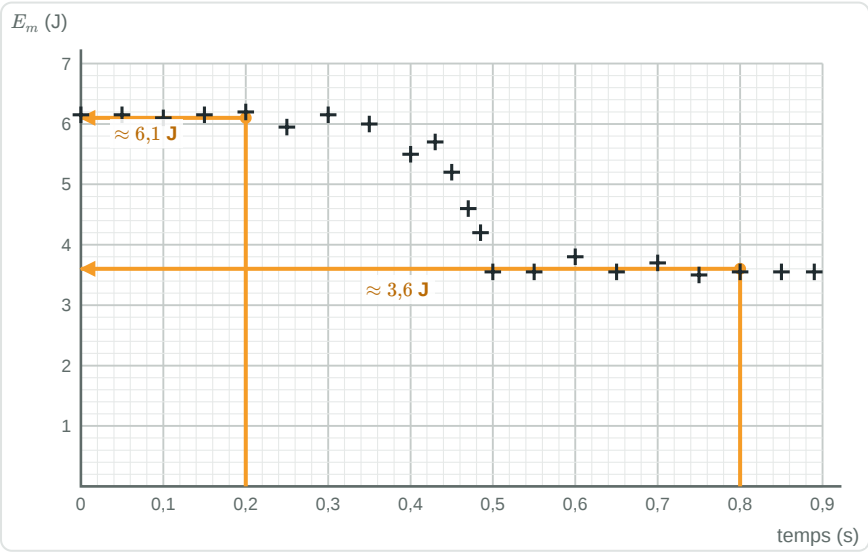
$E_{\text{perdue}} = E_{m,\text{avant}} - E_{m,\text{après}} = 6{,}1 - 3{,}6$

$E_{\text{perdue}} \approx 2{,}5$ J : c'est la valeur attendue.

PIÈGE
Lire les valeurs juste au moment du choc, où les points sont dispersés. On lit les paliers, loin du rebond.

À LA CALCULATRICE





Q13 · Allure de la courbe 1 (figure 4) : paliers lus avant et après le rebond

Q14 Indiquer, en justifiant, s'il est raisonnable de négliger les frottements en dehors du moment où le ballon rebondit.

Des frottements feraient diminuer l'énergie mécanique tout au long du mouvement.

Or, sur la courbe 1, l'énergie mécanique reste pratiquement constante pendant la chute (environ 6,1 J) puis pendant la remontée (environ 3,6 J). Les petits écarts, de l'ordre de 0,2 J, vont dans les deux sens : ils viennent du pointage.

Oui : en dehors du rebond l'énergie mécanique se conserve, les frottements sont négligeables.

COMPRENDRE
Énergie mécanique constante : seules des forces conservatives (ici le poids) travaillent. La perte est entièrement localisée dans le choc avec le sol.

Q15 Déterminer la vitesse initiale minimale à communiquer à un ballon lancé d'une hauteur d'un mètre pour qu'il remonte au moins à cette même hauteur.

Données utiles $m = 600\ \text{g} = 0{,}600\ \text{kg}$; $E_{\text{perdue}} = 2{,}5\ \text{J}$ (Q13) ; hauteur h identique au départ et à l'arrivée

État initial : ballon à la hauteur h, vitesse v_i : $E_{m,i} = \dfrac{1}{2} m v_i^2 + m g h$.

État final, dans le cas limite : le ballon remonte juste à la hauteur h, où sa vitesse s'annule : $E_{m,f} = m g h$.

L'énergie mécanique se conserve en dehors du rebond (Q14) et le rebond fait perdre E_{perdue} :

$$E_{m,f} = E_{m,i} - E_{\text{perdue}} \quad \text{soit} \quad m g h = \frac{1}{2} m v_i^2 + m g h - E_{\text{perdue}}$$

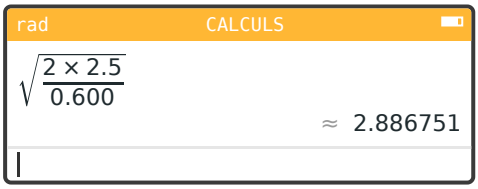
$$\frac{1}{2} m v_i^2 = E_{\text{perdue}} \quad \text{donc} \quad v_i = \sqrt{\frac{2 E_{\text{perdue}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2{,}5}{0{,}600}}$$

$v_i = 2{,}9\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

PIÈGE
Laisser la masse en grammes : avec 600 au lieu de 0,600 kg, on trouve $0{,}09\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, valeur absurde.

COMPRENDRE
Les termes $m g h$ se simplifient : la hauteur n'intervient pas. L'énergie cinétique donnée par la main compense exactement la perte du rebond.

À LA CALCULATRICE



Q16 À l'aide d'un calcul, déterminer si le joueur remplaçant, situé à 1,0 m de l'arbitre qui siffle, doit porter des protections auditives.

Données utiles $d_1 = 20$ m ; $d_2 = 1{,}0$ m ; bruit ambiant : 80 dB ; écart nécessaire : 3 dB ; $I_0 = 1 \times 10^{-12}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$; seuil de danger : 90 dB (figure 5)

Niveau nécessaire à 20 m. Pour être entendu du joueur le plus éloigné, le sifflet doit y produire au moins $L_1 = 80 + 3 = 83$ dB.

Intensité sonore à 20 m. $L_1 = 10 \log\left(\dfrac{I_1}{I_0}\right)$ donne $I_1 = I_0 \times 10^{L_1/10}$:

$$I_1 = 1 \times 10^{-12} \times 10^{8{,}3} = 2{,}0 \times 10^{-4}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

Intensité sonore à 1,0 m. La puissance P du sifflet est la même aux deux distances : $P = 4\pi\, d_1^2\, I_1 = 4\pi\, d_2^2\, I_2$, donc

$$I_2 = I_1 \times \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 2{,}0 \times 10^{-4} \times \left(\frac{20}{1{,}0}\right)^2 = 8{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

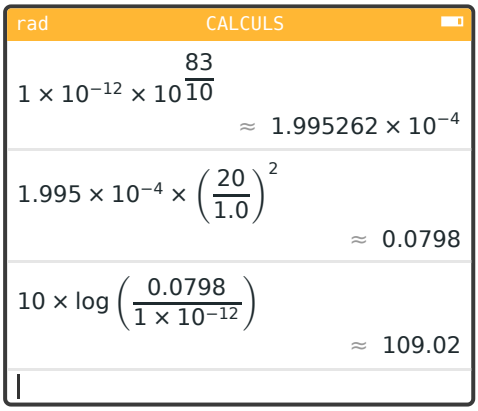
Niveau sonore à 1,0 m.

$$L_2 = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) = 10 \log\left(\frac{8{,}0 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-12}}\right) = 109\ \mathrm{dB}$$

Ce niveau dépasse le seuil de danger de 90 dB.

$L_2 \approx 109\ \mathrm{dB} > 90\ \mathrm{dB}$: le joueur remplaçant devrait porter des protections auditives.

À LA CALCULATRICE



PIÈGE
Raisonner sur les niveaux comme sur des intensités : les décibels ne sont pas proportionnels à $1/d^2$. On passe par I, puis on revient au niveau.

COMPRENDRE
83 dB à 20 m est le minimum pour être entendu : un coup de sifflet plus fort aggrave le risque. Distance divisée par 20, intensité multipliée par 400, soit $+26$ dB.

MÉTHODE
Question ouverte : annoncer la démarche en étapes (niveau voulu, intensité, changement de distance, niveau obtenu, comparaison au seuil). Une démarche claire rapporte des points même inachevée.