Performances des bolomètres de Planck

Bac 2025 Polynésie Jour 1 · Exercice 3 **5 points** **Durée conseillée 53 min**

Q1 Calculer la longueur d'onde λ_0 correspondant à la fréquence f_0 et nommer le domaine du spectre auquel appartient l'onde associée au CMB.

Données utiles $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $f_0 = 217\ \text{GHz} = 217 \times 10^9\ \text{Hz}$; micro-ondes : de 1 à 300 mm

Pour une onde électromagnétique dans le vide : $\lambda_0 = \dfrac{c}{f_0}$.

$$\lambda_0 = \frac{3{,}00 \times 10^8}{217 \times 10^9} = 1{,}38 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

Cette longueur d'onde est comprise entre 1 mm et 300 mm.

$\lambda_0 = 1{,}38\ \text{mm}$: l'onde appartient au domaine des **micro-ondes**.

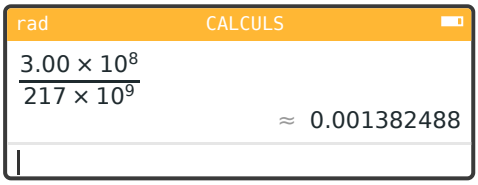
PIÈGE

Laisser la fréquence en gigahertz : $1\ \text{GHz} = 10^9\ \text{Hz}$. Sans cette conversion, on trouve une longueur d'onde de plus de mille kilomètres.

COMPRENDRE

Trois chiffres significatifs, comme c et f_0. Le nom anglais du CMB (« microwave ») permet de contrôler le domaine trouvé.

À LA CALCULATRICE



Q2 Montrer que la puissance P_{CMB} reçue par le bolomètre de la part du CMB au travers du filtre vaut $7{,}82 \times 10^{-14}$ W.

Données utiles $P_{CN} = \sigma\, T_{CN}^4\, S$; $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$; $T_{CMB} = 2{,}725\ \text{K}$; $S_{CMB} = 9{,}93 \times 10^{-8}\ \text{m}^2$; filtre : 25,2 %

Sans filtre, la surface sensible recevrait la puissance $\sigma\, T_{CMB}^4\, S_{CMB}$. Le filtre n'en laisse passer que 25,2 %, donc :

$$P_{CMB} = 0{,}252 \times \sigma\, T_{CMB}^4\, S_{CMB}$$

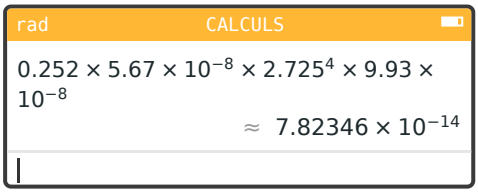
$$P_{CMB} = 0{,}252 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 2{,}725^4 \times 9{,}93 \times 10^{-8}$$

$P_{CMB} = 7{,}82 \times 10^{-14}\ \text{W}$, ce qui est bien la valeur annoncée.

PIÈGE

Oublier le facteur 0,252 du filtre, ou la puissance 4 sur la température : le résultat n'a alors plus rien à voir avec la valeur à retrouver.

À LA CALCULATRICE



Q3 Exprimer la puissance P_T reçue par la partie sensible de la part du thermostat en fonction de T, T_T et $R_{contact}$. Justifier le signe de cette grandeur.

Données utiles $P_{syst} = -\dfrac{T_{syst} - T_0}{R_{th}}$

Le système est la partie sensible, à la température T ; le thermostat est à la température T_T et le contact a pour résistance thermique $R_{contact}$. La relation donnée s'écrit alors :

$$P_T = -\frac{T - T_T}{R_{contact}}$$

Le thermostat est plus froid que la partie sensible : $T > T_T$, donc $T - T_T > 0$. Comme $R_{contact} > 0$, on a $P_T < 0$.

$P_T = -\dfrac{T - T_T}{R_{contact}} < 0$: la partie sensible cède de l'énergie au thermostat.

COMPRENDRE
Une grandeur « reçue » est algébrique : négative, elle signifie que le système perd de l'énergie. Le transfert thermique va spontanément du corps chaud vers le corps froid.

Q4 Exprimer le transfert thermique Q_{tot} échangé par la partie sensible avec l'ensemble des sources extérieures pendant une durée Δt, en fonction de P_{CMB}, T, T_T, Δt et $R_{contact}$.

Données utiles P_T (Q3), supposée constante pendant Δt

La partie sensible échange de l'énergie avec deux sources : le rayonnement du CMB (puissance P_{CMB}) et le thermostat (puissance P_T).

Les puissances étant constantes pendant Δt, l'énergie échangée est le produit de la puissance totale par la durée : $Q_{tot} = (P_{CMB} + P_T)\,\Delta t$.

$$Q_{tot} = \left(P_{CMB} - \frac{T - T_T}{R_{contact}}\right)\Delta t$$

PIÈGE
Écrire $P_{CMB} - P_T$: la puissance P_T est déjà négative, on additionne donc les deux puissances reçues, le signe moins vient de l'expression de P_T.

Q5 Énoncer le premier principe de la thermodynamique en précisant le nom et l'unité de chaque grandeur.

Pour un système fermé, macroscopiquement au repos, la variation de son énergie interne entre deux états est égale à la somme du travail et du transfert thermique qu'il reçoit de l'extérieur.

- ΔU : variation de l'énergie interne du système, en joules (J) ;
- W : travail reçu par le système, en joules (J) ;
- Q : transfert thermique reçu par le système, en joules (J).

$\Delta U = W + Q$

COMPRENDRE
Ici la partie sensible ne reçoit aucun travail : $\Delta U = Q_{tot}$. Avec $\Delta U = C_{bolo}\,\Delta T$, on obtient l'équation différentielle donnée ensuite par le sujet.

Q6 Par une analyse dimensionnelle, montrer que $\tau = R_{contact} \cdot C_{bolo}$ est homogène à un temps, puis calculer sa valeur.

Données utiles $R_{contact} = 3{,}75 \times 10^{9}\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}$; $C_{bolo} = 0{,}40 \times 10^{-12}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$; $1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J \cdot s^{-1}}$

Unité du produit $R_{contact} \cdot C_{bolo}$:

$$\mathrm{K \cdot W^{-1} \times J \cdot K^{-1}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{W}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{J \cdot s^{-1}}} = \mathrm{s}$$

Le produit s'exprime en secondes : τ est bien homogène à un temps.

$$\tau = 3{,}75 \times 10^{9} \times 0{,}40 \times 10^{-12} = 1{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$$

$\tau = 1{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{s} = 1{,}5\ \mathrm{ms}$

COMPRENDRE
Deux chiffres significatifs seulement : $C_{bolo} = 0{,}40 \times 10^{-12}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$ est la donnée la moins précise.

MÉTHODE
Pour une analyse dimensionnelle, remplacer chaque grandeur par son unité, simplifier, puis ramener les unités composées (ici le watt) aux unités de base.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$3.75 \times 10^{9} \times 0.40 \times 10^{-12}$

$\approx$ 0.0015

Q7 Sachant que $T(t) = T_T + T_1\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ est la solution de l'équation différentielle vérifiant $T(0) = T_T$, donner l'expression de T_1 et sa valeur.

Données utiles $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \dfrac{T}{R_{contact}\,C_{bolo}} = \dfrac{P_{CMB}}{C_{bolo}} + \dfrac{T_T}{R_{contact}\,C_{bolo}}$; $P_{CMB} = 7{,}82 \times 10^{-14}$ W (Q2) ; $R_{contact} = 3{,}75 \times 10^{9}$ K · W^{-1}

Quand t devient très grand, $e^{-t/\tau}$ tend vers 0 : la température tend vers la valeur constante $T_\infty = T_T + T_1$.

En régime permanent, $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$ et l'équation différentielle devient :

$$\frac{T_\infty}{R_{contact}\,C_{bolo}} = \frac{P_{CMB}}{C_{bolo}} + \frac{T_T}{R_{contact}\,C_{bolo}}$$

En multipliant par $R_{contact}\,C_{bolo}$: $T_\infty = R_{contact}\,P_{CMB} + T_T$. Par comparaison avec $T_\infty = T_T + T_1$:

$$T_1 = R_{contact}\,P_{CMB} = 3{,}75 \times 10^{9} \times 7{,}82 \times 10^{-14}$$

$\boxed{T_1 = R_{contact}\,P_{CMB} = 2{,}93 \times 10^{-4}\ \text{K}}$

COMPRENDRE

T_1 est l'échauffement final de la partie sensible : environ 0,3 mK au-dessus des 0,100 K du thermostat. Il est proportionnel à P_{CMB} : mesurer cet écart de température revient à mesurer la puissance reçue.

MÉTHODE

Pour identifier une constante dans une solution donnée, exploiter le régime permanent : dérivée nulle dans l'équation, exponentielle nulle dans la solution.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

$3.75 \times 10^{9} \times 7.82 \times 10^{-14}$

$\approx$ 2.9325×10^{-4}

Q8 Montrer que le bolomètre du satellite Planck peut obtenir une mesure fiable du CMB.

Données utiles mesure fiable au bout de 5τ ; $\tau = 1{,}5$ ms (Q6) ; $\Delta t_{scan} = 14$ ms

La température de la partie sensible est stabilisée au bout de :

$$5\tau = 5 \times 1{,}5 = 7{,}5\ \text{ms}$$

Or chaque zone du ciel est balayée pendant $\Delta t_{scan} = 14$ ms, durée supérieure à 5τ.

$5\tau = 7{,}5\ \text{ms} < \Delta t_{scan} = 14\ \text{ms}$: la température a le temps de se stabiliser, la mesure est fiable.

PIÈGE

Comparer τ seul à Δt_{scan} : au bout de τ, l'échauffement n'a atteint que 63 % de sa valeur finale. Le critère de l'énoncé est 5τ.

À LA CALCULATRICE

rad CALCULS

5×1.5

$\approx$ 7.5