# Le mölkky

Bac 2025 Polynésie Jour 1 · Exercice 2 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

**Q1** Énoncer la deuxième loi de Newton et l'utiliser pour établir les coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération du point G.

Deuxième loi de Newton : dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système de masse $m$ constante est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre de masse : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$.

Système {bâton}, référentiel terrestre supposé galiléen ; seule force : le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

$m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Le vecteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas, donc opposé à $\vec{j}$ :

$$a_x(t) = 0 \quad \text{et} \quad a_y(t) = -g$$

**PIÈGE**
Oublier le signe : l'axe (Oy) est orienté vers le haut alors que $\vec{g}$ pointe vers le bas, donc $a_y = -g$ et non $+g$.

**MÉTHODE**
Toujours dans cet ordre : système, référentiel galiléen, bilan des forces, deuxième loi de Newton, puis projection sur les axes du repère.

**Q2** Établir les expressions des coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse du point G.

Comme $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de $a_x$ et $a_y$ :

$v_x(t) = C_1 \quad$ et $\quad v_y(t) = -g\,t + C_2$

À $t = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, de coordonnées $v_0\cos(\alpha)$ et $v_0\sin(\alpha)$ d'après la figure 1. Donc $C_1 = v_0\cos(\alpha)$ et $C_2 = v_0\sin(\alpha)$.

$$v_x(t) = v_0\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad v_y(t) = -g\,t + v_0\sin(\alpha)$$

**PIÈGE**
Inverser sinus et cosinus. L'angle $\alpha$ est mesuré par rapport à l'horizontale : le côté adjacent est selon (Ox), d'où le cosinus pour $v_{0x}$.

**COMPRENDRE**
La vitesse horizontale reste constante pendant tout le vol : aucune force n'agit selon (Ox). Seule la vitesse verticale varie.

**Q3** À partir de $v_x(t)$, $v_y(t)$ et de la figure 1, établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du point G.

Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$, on cherche les primitives de $v_x$ et $v_y$ :

$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t + C_3 \quad$ et $\quad y(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + C_4$

À $t = 0$, d'après la figure 1, G est sur l'axe (Oy) à la hauteur $h$ : $x(0) = 0$ et $y(0) = h$. Donc $C_3 = 0$ et $C_4 = h$.

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)\,t \quad \text{et} \quad y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t + h$$

**PIÈGE**
Poser $y(0) = 0$ par habitude. Ici l'origine O est au sol et le bâton part de la hauteur $h$ : la constante $C_4$ n'est pas nulle.

**Q4** Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit $y(x) = -0{,}27\,x^2 + 0{,}58\,x + 0{,}70$, avec $x$ et $y$ en mètres.

**Données utiles** $v_0 = 4{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ; $h = 0{,}70\ \text{m}$ ; $\alpha = 30^\circ$ ; $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

D'après $x(t) : t = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$. On remplace $t$ dans $y(t)$ :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\right)^2 + v_0\sin(\alpha)\frac{x}{v_0\cos(\alpha)} + h$$

$$y(x) = -\frac{g}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}\,x^2 + \tan(\alpha)\,x + h$$

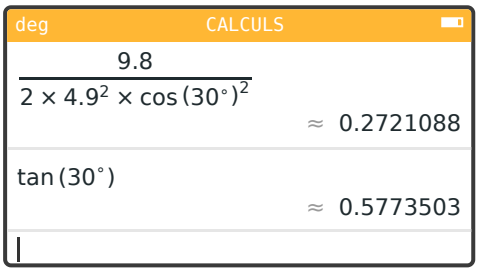
Application numérique : $\dfrac{9{,}8}{2\times 4{,}9^2\times\cos^2(30^\circ)} = 0{,}27\ \text{m}^{-1}$ et $\tan(30^\circ) = 0{,}58$.

$y(x) = -0{,}27\,x^2 + 0{,}58\,x + 0{,}70$ : c'est bien l'expression attendue.

**PIÈGE**
Calculatrice en radians : $\cos(30)$ donne alors $0{,}15$ au lieu de $0{,}87$. Vérifier le mode degré avant tout calcul.

**COMPRENDRE**
Les données ont deux chiffres significatifs : les coefficients et tous les résultats suivants s'écrivent avec deux chiffres significatifs.

**À LA CALCULATRICE**




**Q5** Vérifier que la partie est remportée par le joueur si le lancer est réalisé dans les conditions des données.

**Données utiles** score actuel : 41 points, à atteindre : 50 points ; $x_{q9} = 3{,}0$ m ; $x_{q1} = 4{,}0$ m ; $x_{q5} = 5{,}0$ m ; $y(x)$ (Q4)

Il manque $50 - 41 = 9$ points : le joueur gagne si le bâton renverse la quille 9 seule, donc s'il touche le sol en $x_{q9} = 3{,}0$ m.

Le bâton touche le sol quand $y(x) = 0$ : $-0{,}27\,x^2 + 0{,}58\,x + 0{,}70 = 0$

$\Delta = 0{,}58^2 - 4\times(-0{,}27)\times 0{,}70 = 1{,}09 > 0$ : deux solutions, dont une seule positive :

$$x = \frac{-0{,}58 - \sqrt{1{,}09}}{2\times(-0{,}27)} = 3{,}0\ \text{m}$$

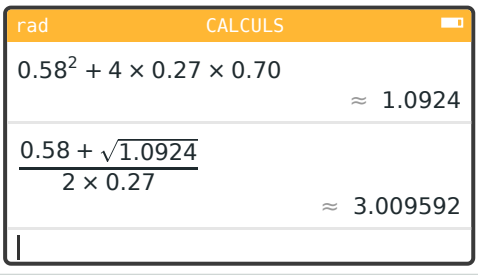
Le bâton arrive au sol en $x = 3{,}0\ \text{m} = x_{q9}$ : il renverse la quille 9, le score passe à $41 + 9 = 50$ points, la partie est gagnée.

**PIÈGE**
Garder la racine négative ($x = -0{,}86$ m) : elle correspond à un point situé derrière le joueur, sans sens physique ici.

**COMPRENDRE**
Sans rebond, le bâton s'arrête à 3,0 m : les quilles 1 et 5, placées à 4,0 m et 5,0 m, restent debout. Le score est donc exactement 50.

**MÉTHODE**
Autre démarche acceptée : calculer $y(3{,}0) = 0{,}01$ m. Le centre du bâton est à un centimètre du sol à l'abscisse de la quille 9 : il la touche.

**À LA CALCULATRICE**



**Q6** À partir de la figure 3, déterminer la masse $m$ du bâton de mölkky. Justifier.

La ligne 18 calcule l'énergie cinétique, d'expression $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ avec $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Dans `Ec=0,5*0,4*(...)`, le facteur qui suit $0{,}5$ est la masse.

La ligne 20 le confirme : $E_p = m\,g\,y$ est codée `0.4*9,81*y[i]`.

$m = 0{,}4$ kg

**COMPRENDRE**
L'extrait du sujet contient des coquilles : virgules décimales (Python exige le point) et parenthèses mal placées ligne 18. La ligne correcte est $\texttt{Ec=0.5*0.4*(vxl[i]**2+vyl[i]**2)}$. Cela ne change pas la lecture de la masse.

**Q7** Écrire et compléter la ligne 22 du programme, qui calcule l'énergie mécanique $E_m$ du bâton.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_m = E_c + E_p$.

Ligne 22 : `Em=Ec+Ep`

**PIÈGE**
Écrire `Em=Ecl+Epl` : ce sont des listes, Python les mettrait bout à bout au lieu d'additionner les valeurs. Dans la boucle, on additionne les deux nombres `Ec` et `Ep` de l'instant en cours.

**Q8** Attribuer chaque courbe de la figure 4 à l'énergie représentée. Justifier.

Courbe C : elle est constante. Le bâton n'est soumis qu'à son poids, son énergie mécanique se conserve : c'est $E_m$.

Courbe A : elle augmente, passe par un maximum puis s'annule à la fin. C'est $E_p = m\,g\,y$, qui suit l'altitude : le bâton monte, atteint le sommet, puis redescend jusqu'au sol où $y = 0$.

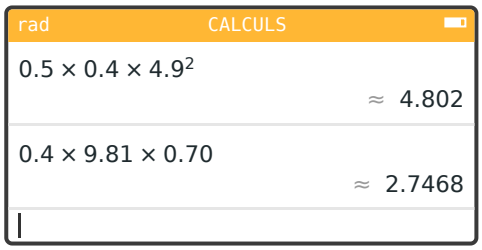
Courbe B : elle diminue puis augmente. C'est $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ : la vitesse diminue pendant la montée et augmente pendant la descente.

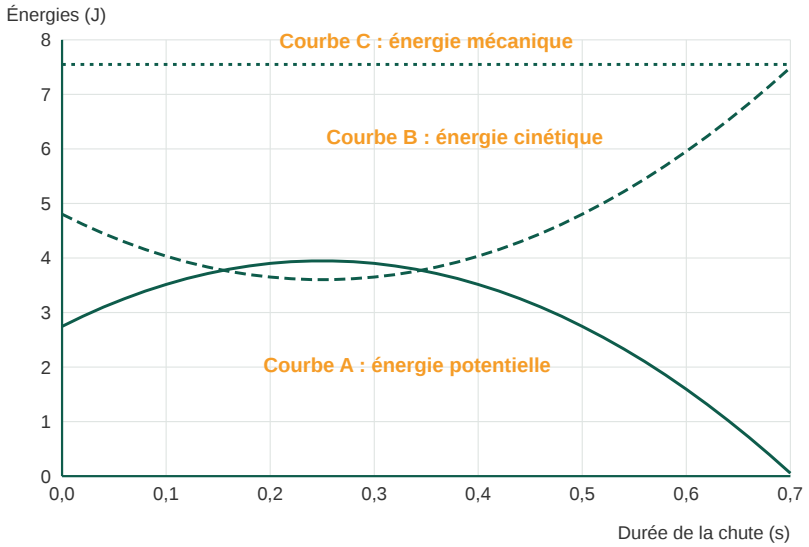
Courbe A : $E_p$ ; courbe B : $E_c$ ; courbe C : $E_m$.

**COMPRENDRE**
$E_c$ ne s'annule jamais : au sommet, la vitesse verticale est nulle mais la vitesse horizontale $v_0 \cos(\alpha)$ demeure.

**MÉTHODE**
Vérifier avec les valeurs à $t = 0$ : $E_c = 0{,}5 \times 0{,}4 \times 4{,}9^2 = 4{,}8$ J (départ de B) et $E_p = 0{,}4 \times 9{,}81 \times 0{,}70 = 2{,}7$ J (départ de A).

**À LA CALCULATRICE**




**Q8** · Figure 4 du sujet, avec l'attribution des trois courbes

**Q9** Déterminer la durée de vol du bâton (durée de chute) et en déduire, à l'aide des équations horaires de Q3, que la partie est remportée par le joueur.

**Données utiles** $v_0 = 4{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ; $\alpha = 30^\circ$ ; $x_{q9} = 3{,}0$ m ; figure 4

Le vol s'achève quand le bâton touche le sol : $y = 0$, donc $E_p = 0$. Sur la figure 4, la courbe A (Q8) s'annule à $t_{\text{vol}} = 0{,}70$ s.

Abscisse du bâton à cette date, d'après $x(t)$ (Q3) :

$$x(t_{\text{vol}}) = v_0 \cos(\alpha)\, t_{\text{vol}} = 4{,}9 \times \cos(30^\circ) \times 0{,}70 = 3{,}0\ \text{m}$$

$t_{\text{vol}} = 0{,}70$ s et $x(t_{\text{vol}}) = 3{,}0\ \text{m} = x_{q9}$ : le bâton tombe sur la quille 9, la partie est gagnée.

**COMPRENDRE**

On retrouve le résultat de Q5 par un autre chemin : la trajectoire $y(x)$ donnait le point de chute, les équations horaires donnent en plus la date d'arrivée.

**MÉTHODE**

Vérification par le calcul : $y(t) = 0$ s'écrit $-4{,}9\,t^2 + 2{,}45\,t + 0{,}70 = 0$, de racine positive $t = 0{,}70$ s. Même durée que sur le graphique.

**À LA CALCULATRICE**

