Raven Saunders, la lanceuse de poids américaine

Bac 2025 Amérique du Nord Jour 2 bis · Exercice 3 **6 points** **Durée conseillée 1 h 03**

Q1 Montrer que la valeur de la force de frottements f est très petite devant la valeur du poids P de la sphère métallique.

Données utiles $m = 4{,}00$ kg ; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\rho = 1{,}29\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $C_x = 0{,}51$; $S = 7{,}62\times10^{-3}\ \text{m}^2$; $v = 14\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Poids : $P = m\,g = 4{,}00\times 9{,}81 = 39{,}2$ N.

Frottements, calculés à la vitesse maximale, donc à leur valeur la plus grande :

$$f = \frac{1}{2}\,\rho\,C_x\,S\,v^2 = \frac{1}{2}\times 1{,}29\times 0{,}51\times 7{,}62\times10^{-3}\times 14^2 = 0{,}49\ \text{N}$$

$\dfrac{P}{f} = \dfrac{39{,}2}{0{,}49} \approx 80$: même au maximum, f est 80 fois plus petite que P, donc $f \ll P$.

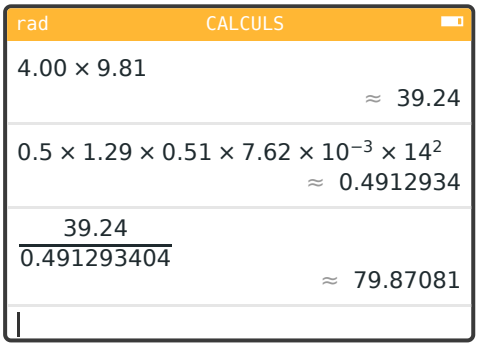
COMPRENDRE

Chiffres significatifs : P en garde trois, comme m et g ; f seulement deux, car C_x et v n'en ont que deux. Un résultat n'est pas plus précis que la donnée la moins précise.

MÉTHODE

Pour justifier qu'une force est négligeable, calculer les deux valeurs puis leur rapport. Conclure avec un nombre : « 80 fois plus petite » vaut mieux que « beaucoup plus petite ».

À LA CALCULATRICE



Q2 Montrer que les équations horaires du mouvement de la sphère, à partir de l'instant où elle est abandonnée en A, sont $x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t$ et $z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + h$.

Système {sphère métallique}, de masse m constante ; référentiel terrestre supposé galiléen ; repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$. Les frottements étant négligés (Q1), la seule force est le poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

Deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\,\vec{a}$, soit $m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$.

Comme $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas : $a_x(t) = 0$ et $a_z(t) = -g$.

Or $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$: on cherche les primitives.

$$v_x(t) = C_1 \qquad v_z(t) = -g\,t + C_2$$

À $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$ de coordonnées $(v_0 \cos\alpha\ ;\ v_0 \sin\alpha)$, donc $C_1 = v_0 \cos\alpha$ et $C_2 = v_0 \sin\alpha$:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \qquad v_z(t) = -g\,t + v_0 \sin\alpha$$

Or $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}$: on cherche de nouveau les primitives.

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t + C_3 \qquad z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + C_4$$

À $t = 0$, la sphère est en A de coordonnées $(0\ ;\ h)$, donc $C_3 = 0$ et $C_4 = h$.

$$\boxed{x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + h}$$

PIÈGE
Oublier la constante h : la sphère part de A, à la hauteur h, pas de l'origine O. Oublier le signe « $-$ » de a_z alors que l'axe (Oz) est orienté vers le haut.

MÉTHODE
Toujours le même plan : système, référentiel, bilan des forces, deuxième loi de Newton, projection de $\vec{a}$, puis deux recherches de primitives. Chaque constante se détermine avec une condition initiale écrite explicitement.

Q3 Montrer que l'équation de la trajectoire du centre de masse de la sphère est $z(x) = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + x \tan\alpha + h$.

On isole t dans la première équation horaire : $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

On remplace t dans $z(t)$:

$$z(x) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + h$$

On simplifie par v_0 dans le deuxième terme, avec $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$:

$$\boxed{z(x) = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + x \tan\alpha + h}$$

COMPRENDRE
L'équation est de la forme $z = a\,x^2 + b\,x + c$ avec $a < 0$: la trajectoire est une portion de parabole tournée vers le bas, contenue dans le plan vertical du lancer.

Q4 Montrer, à l'aide des données et de la figure 2, que l'abscisse du point de chute M vaut $x_M = 18{,}32$ m.

Données utiles $D = 18{,}62$ m ; $BO = 0{,}30$ m

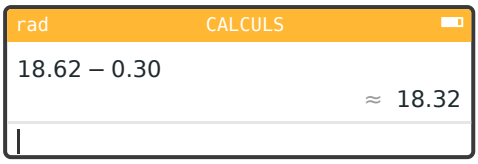
Sur la figure 2, les points B, O et M sont alignés dans cet ordre sur le sol, et la portée est mesurée depuis le butoir : $D = BM = BO + OM$.

L'origine du repère est O, donc $x_M = OM = D - BO$.

$$\boxed{x_M = 18{,}62 - 0{,}30 = 18{,}32 \text{ m, valeur attendue.}}$$

PIÈGE
Confondre la portée D, mesurée depuis le butoir B, avec l'abscisse x_M, mesurée depuis O, à la verticale du point de lâcher. Les deux diffèrent de 30 cm.

À LA CALCULATRICE



Q5 Vérifier que la durée t_M du déplacement de la sphère entre A et M est d'environ 2 s.

Données utiles $x_M = 18{,}32$ m (Q4) ; $v_0 = 12{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 45{,}0^\circ$

À l'instant t_M, la sphère est en M : $x(t_M) = x_M$, soit $(v_0 \cos\alpha)\, t_M = x_M$.

$$t_M = \frac{x_M}{v_0 \cos\alpha} = \frac{18{,}32}{12{,}8 \times \cos(45{,}0^\circ)} = 2{,}02\ \text{s}$$

$t_M = 2{,}02\ \text{s} \approx 2\ \text{s}$, valeur attendue.

PIÈGE
Calculatrice en radians : $\cos(45)$ donne alors $0{,}525$ au lieu de $0{,}707$ et la durée trouvée est fausse. Vérifier le mode degré avant le calcul.

MÉTHODE
L'équation $x(t)$ est du premier degré en t : elle donne t_M en une ligne. Passer par $z(t_M) = 0$ est possible, mais oblige à résoudre une équation du second degré.

Q6 En déduire la valeur v_M de la vitesse au moment du contact avec le sol.

Données utiles $t_M = 2{,}02$ s (Q5) ; $v_0 = 12{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 45{,}0^\circ$; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Coordonnées du vecteur vitesse (établies en Q2) à l'instant t_M :

$v_x(t_M) = v_0 \cos\alpha = 12{,}8 \times \cos(45{,}0^\circ) = 9{,}05\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$v_z(t_M) = -g\, t_M + v_0 \sin\alpha = -9{,}81 \times 2{,}02 + 12{,}8 \times \sin(45{,}0^\circ) = -10{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

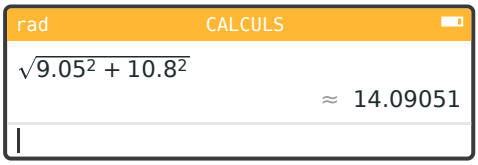
Valeur de la vitesse : $v_M = \sqrt{v_x(t_M)^2 + v_z(t_M)^2} = \sqrt{9{,}05^2 + (-10{,}8)^2}$

$v_M = 14{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

PIÈGE
Prendre $t_M = 2$ s au lieu de $2{,}02$ s donne $13{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Garder la valeur non arrondie dans les calculs intermédiaires.

COMPRENDRE
v_z est négative : la sphère descend. La composante horizontale v_x n'a pas changé depuis le lancer, puisque $a_x = 0$.

À LA CALCULATRICE



Q7 L'origine des énergies potentielles étant prise au niveau du sol, exprimer l'énergie mécanique E_m de la sphère au moment du lancer en fonction de m, h, g et v_0.

$E_m = E_c + E_{pp}$. Au moment du lancer, la sphère est en A, à l'altitude $z = h$, avec la vitesse v_0 :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g h$$

PIÈGE
Écrire $E_{pp} = 0$ au lancer. L'origine des énergies potentielles est au sol, et la sphère est lâchée à la hauteur h au-dessus du sol.

Q8 En déduire l'expression de la vitesse v_M au point de chute M par un raisonnement énergétique. Calculer sa valeur et vérifier la cohérence avec le résultat de la question Q6.

Données utiles $v_0 = 12{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $h = 1{,}80\ \text{m}$; $v_M = 14{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (Q6)

Les frottements sont négligés : la sphère n'est soumise qu'à son poids, force conservative, donc l'énergie mécanique se conserve entre A et M.

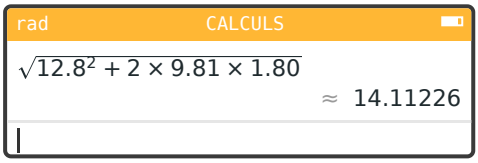
En M, au sol, $z = 0$ donc $E_{pp} = 0$: $\quad E_m(M) = \dfrac{1}{2}\,m\,v_M^2$.

$E_m(M) = E_m(A)$ s'écrit : $\quad \dfrac{1}{2}\,m\,v_M^2 = \dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 + m\,g\,h$, soit $v_M^2 = v_0^2 + 2\,g\,h$.

$$v_M = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h} = \sqrt{12{,}8^2 + 2 \times 9{,}81 \times 1{,}80} = 14{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$v_M = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,h} = 14{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$: même valeur qu'en Q6, les deux méthodes sont cohérentes.

À LA CALCULATRICE



COMPRENDRE

La masse se simplifie et l'angle α n'intervient pas : la vitesse à l'arrivée au sol ne dépend que de v_0 et de la hauteur de chute h.

MÉTHODE

Raisonnement énergétique en trois temps : justifier la conservation de E_m, écrire E_m aux deux points avec la même origine des altitudes, puis isoler la grandeur cherchée avant de passer aux valeurs.